Synthèse 5 : Produit scalaire et norme

Sandrine CHARLES : *scharles@biomserv.univ-lyon1.fr*

1

Produit scalaire

Définition 1

Soit φ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui a tout couple $(\vec{u}, \vec{v})$ de vecteurs de E fait correspondre un réel $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$. φ est une **forme bilinéaire**, si elle est linéaire par rapport à $\vec{u}$ **et** par rapport à $\vec{v}$:

$$\forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in E, \forall \vec{v} \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \varphi(\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2, \vec{v}) = \lambda \varphi(\vec{u}_1, \vec{v}) + \mu \varphi(\vec{u}_2, \vec{v})$$

$$\forall \vec{u} \in E, \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \qquad \varphi(\vec{u}, \lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{v}_2) = \lambda \varphi(\vec{u}, \vec{v}_1) + \mu \varphi(\vec{u}, \vec{v}_2)$$

Proposition 1

(i) φ est **symétrique** si $\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$

(ii) φ est **définie** si $\forall \vec{u} \in E, \varphi(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

(iii) φ est **positive** si $\forall \vec{u} \in E, \varphi(\vec{u}, \vec{u}) \geq 0$

Définition 2

On appelle **produit scalaire** une forme bilinéaire symétrique, définie et positive. Dans toute la suite du cours nous adopterons la notation $\vec{u} \bullet \vec{v}$. On appelle **norme** ou **longueur** du vecteur $\vec{u}$ associée au produit scalaire (•) et notée $\|\vec{u}\|_\bullet$, le scalaire : $\|\vec{u}\|_\bullet = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} \Leftrightarrow \|\vec{u}\|_\bullet^2 = \vec{u} \bullet \vec{u}$.

Définition 3

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**.

1.1 Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

Proposition

L'application suivante est un produit scalaire appelé **produit scalaire canonique** de $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n} x_i y_j \end{array} \qquad \text{avec } \vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \text{ et } \vec{y} = (y_1, \dots, y_n)$$

Définition

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique est appelé **espace euclidien** de dimension *n*. La norme de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit alors $\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \bullet \vec{x} = {}^t\mathbf{XX}$

1.2 D'autres exemples

2 Inégalité de Cauchy-Schwartz et applications

Théorème 1 (Inégalité de Schwartz)

Si $\bullet$ est un produit scalaire sur un espace vectoriel *E*, pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$:

$$|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \sqrt{(\vec{u} \bullet \vec{u})(\vec{v} \bullet \vec{v})} \text{ ce qui équivaut à } |\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\|_\bullet \|\vec{v}\|_\bullet$$

Théorème 2

Soit *E* un espace préhilbertien. Alors la norme de *E* satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\|\vec{u}\|_\bullet \geq 0$ et $\|\vec{u}\|_\bullet = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

(ii) $\|\lambda\vec{u}\|_\bullet = |\lambda| \, \|\vec{u}\|_\bullet \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

(iii) $\|\vec{u} + \vec{v}\|_\bullet \leq \|\vec{u}\|_\bullet + \|\vec{v}\|_\bullet$

Définition

Soit *E* un espace préhilbertien. Soit $\vec{u} \in E$. Si $\|\vec{u}\|_\bullet = 1$, ou si de manière équivalente $\vec{u} \bullet \vec{u} = 1$, alors $\vec{u}$ est appelé un **vecteur unitaire**.

Proposition

Si $\vec{x} \neq \vec{0}_E$ un vecteur quelconque de *E* espace préhilbertien, alors le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\vec{x}$ est unitaire et colinéaire à $\vec{x}$. On appelle $\vec{u}$ le **vecteur normé** associé à $\vec{x}$. Le procédé correspondant s'appelle la **normalisation**.

3 Orthogonalité, projection

3.1 Définition

Définition

Soit E un espace préhilbertien. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont dits **orthogonaux** si et seulement si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$. On dit aussi que $\vec{u}$ est **orthogonal** à $\vec{v}$.

3.2 Recherche de vecteurs orthogonaux

3.3 Supplémentaire orthogonal

3.4 Ensembles orthogonaux

Définitions

★ Un ensemble $F = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ de vecteurs de E, un espace préhilbertien, est dit **orthogonal** si deux vecteurs quelconques de F sont orthogonaux : $\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0$, $\forall i \neq j$

★ F est dit **orthonormal**, si F est orthogonal et si tous les vecteurs de F sont unitaires :
$$\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

<u>Théorème 1</u>

Soit F un ensemble orthogonal de vecteurs non nuls. Alors les vecteurs de F sont linéairement indépendants.

<u>Théorème 2</u> **: Pythagore**

Soit $F = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ un ensemble orthogonal. Alors :

$$\|\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_p\|_\bullet^2 = \|\vec{u}_1\|_\bullet^2 + \ldots + \|\vec{u}_p\|_\bullet^2$$

<u>Proposition</u>

La base canonique $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une ***base orthonormale***. En effet, $\forall i \neq j \quad \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = 0$ et $\forall i = 1, n \quad \|\vec{e}_i\|_\bullet = 1$.

3.5 Projecteur orthogonal

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Le **vecteur projeté** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est le vecteur :

$$p_{/\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \vec{u}$$

$p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v} - p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ lui est orthogonal.

Définition 2

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. L'application $p_{/\vec{u}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\vec{v}$ associe $p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ est appelé **projecteur orthogonal** sur $\vec{u}$.

4 Distance euclidienne

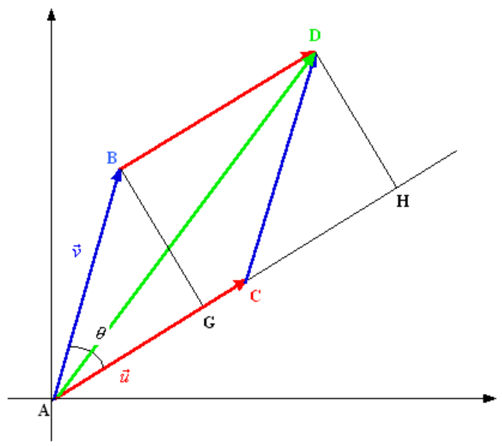
Définition

Soient $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. La distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui n'est autre que la distance entre les points extrémités des deux vecteurs, est définie par : $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

Proposition

Soit $\mathbb{R}^n$ espace euclidien. Alors $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}$. On parle de ***distance euclidienne***.

5 Déterminant et volume



$$\boxed{A_{ABDC} = \det(\vec{u}, \vec{v})}$$