Chapitre 5 : Produit scalaire et norme

Sandrine CHARLES : scharles@biomserv.univ-lyon1.fr

Introduction

La notion d'espace vectoriel constitue le cadre général de l'Algèbre Linéaire. La richesse de cette théorie s'accroît si on y ajoute d'autres structures. La plus importante d'entre elles fait référence aux mesures de longueurs, de distance et d'angle : c'est la structure métrique. Et c'est la notion de produit scalaire qui permet de donner un sens, de définir, et d'étudier les propriétés métriques d'un espace vectoriel.

1 Produit scalaire

Définition 1

Soit φ une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ qui a tout couple $(\vec{u},\vec{v})$ de vecteurs de E fait correspondre un réel $\varphi(\vec{u},\vec{v})$. φ est une **forme bilinéaire**, si elle est linéaire par rapport à $\vec{u}$ **et** par rapport à $\vec{v}$:

$$\forall \vec{u}_1,\vec{u}_2 \in E,\ \forall \vec{v} \in E,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \varphi(\lambda\vec{u}_1+\mu\vec{u}_2,\vec{v}) = \lambda\varphi(\vec{u}_1,\vec{v})+\mu\varphi(\vec{u}_2,\vec{v})$$

$$\forall \vec{u} \in E,\ \forall \vec{v}_1,\vec{v}_2 \in E,\ \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R} \qquad \varphi(\vec{u},\lambda\vec{v}_1+\mu\vec{v}_2) = \lambda\varphi(\vec{u},\vec{v}_1)+\mu\varphi(\vec{u},\vec{v}_2)$$

Remarque

Cette définition rejoint celle des formes multilinéaires introduite pour les déterminants.

Proposition 1

(i) φ est **symétrique** si $\forall \vec{u},\vec{v} \in E,\ \varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{v},\vec{u})$

(ii) φ est **définie** si $\forall \vec{u} \in E,\ \varphi(\vec{u},\vec{u}) = 0 \Rightarrow \vec{u} = \vec{0}$

(iii) φ est **positive** si $\forall \vec{u} \in E,\ \varphi(\vec{u},\vec{u}) \geq 0$

Définition 2

On appelle **produit scalaire** une forme bilinéaire symétrique, définie et positive.

Notations du produit scalaire : $\varphi(\vec{u},\vec{v})$ $\quad (\vec{u} \mid \vec{v})$ $\quad \langle \vec{u},\vec{v} \rangle$ $\quad \vec{u} \bullet \vec{v}$

Dans toute la suite du cours nous adopterons la notation $\vec{u} \bullet \vec{v}$.

Remarques

- Un espace vectoriel est muni *a priori* de plusieurs produits scalaires.
- $\vec{u} \bullet \vec{v}$ est une opération entre deux vecteurs ; le résultat est un scalaire.

Définition 3

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé **espace préhilbertien**.

D'après la définition du produit scalaire, $\vec{u} \bullet \vec{u}$ est positif ou nul ; Il admet donc une racine carrée que l'on note $\|\vec{u}\|_{\bullet} = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$.

Définition

On appelle **norme** ou **longueur** du vecteur $\vec{u}$ associée au produit scalaire (•) et notée $\|\vec{u}\|_{\bullet}$, le scalaire :

$$\|\vec{u}\|_{\bullet} = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} \Leftrightarrow \|\vec{u}\|_{\bullet}^2 = \vec{u} \bullet \vec{u}$$

1.1 Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel.

<u>*Proposition*</u>

L'application suivante est un produit scalaire :

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \sum_{i=1}^{i=n} x_i y_j \end{array} \qquad \text{avec } \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \text{ et } \vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$$

On l'appelle **produit scalaire canonique** de $\mathbb{R}^n$.

<u>Démonstration</u>

Définition

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique est appelé **espace euclidien** de dimension *n*.

➔ Dans toute la suite du chapitre, nous ferons toujours référence pour $\mathbb{R}^n$, *sauf mention contraire*, au produit salaire canonique.

Remarque

Si on désigne par **X** et **Y** les matrices des coordonnées des vecteurs $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\vec{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, alors on a $\boxed{\vec{x} \bullet \vec{y} = {}^t\mathbf{XY}}$.

Exemple

Soient $\vec{x} = (1, -2, 5)$ et $\vec{y} = (2, -1, 3)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Vérifier la proposition précédente. Réponse.

Proposition

$\mathbb{R}^n$ étant muni de son produit scalaire canonique, la norme de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit :

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \Leftrightarrow \|\vec{x}\|^2 = \vec{x} \bullet \vec{x} = {}^t\mathbf{XX}$$

Exemple

On suppose $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique. Calculer la norme de $\vec{x} = (2, -2, -1)$. Normer $\vec{x}$. Réponse.

1.2 D'autres exemples

1. Soit V l'ensemble des fonctions continues sur l'intervalle $[a, b]$. V est un espace vectoriel. Alors l'expression suivante définit un produit scalaire sur V :

$$f \bullet g = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$

Où f et g sont des fonctions quelconques continues sur $[a, b]$.

2. Considérons $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de dimension (n, p) à coefficients dans $\mathbb{R}$. Nous avons déjà vu que $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel (Chap3, § 2.2).

Alors l'expression suivante définit un produit scalaire sur $\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{R})$:

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = tr\left({}^t\mathbf{AB}\right)$$

où *tr* désigne la trace de la matrice ${}^t\mathbf{AB}$ c'est-à-dire la somme des éléments diagonaux de la matrice. Si $\mathbf{A} = \left[a_{ij}\right]$ et $\mathbf{B} = \left[b_{ij}\right]$ avec $i = 1, n$ et $j = 1, p$, alors :

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B} = tr\left({}^t\mathbf{AB}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{ij} b_{ij}$$

2 Inégalité de Cauchy-Schwartz et applications

Théorème 1 (Inégalité de Schwartz)

Si $\bullet$ est un produit scalaire sur un espace vectoriel *E*, pour tout $\vec{u}, \vec{v} \in E$:

$$\left|\vec{u} \bullet \vec{v}\right| \leq \sqrt{\left(\vec{u} \bullet \vec{u}\right)\left(\vec{v} \bullet \vec{v}\right)} \text{ ce qui équivaut à } \left|\vec{u} \bullet \vec{v}\right| \leq \left\|\vec{u}\right\|_{\bullet} \left\|\vec{v}\right\|_{\bullet}$$

Remarque

Le symbole $\left| \; \right|$ désigne la valeur absolue.

Théorème 2

Soit *E* un espace préhilbertien. Alors la norme de *E* satisfait les propriétés suivantes :

(i) $\left\|\vec{u}\right\|_{\bullet} \geq 0$ et $\left\|\vec{u}\right\|_{\bullet} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

(ii) $\left\|\lambda\vec{u}\right\|_{\bullet} = \left|\lambda\right| \left\|\vec{u}\right\|_{\bullet} \quad \left(\lambda \in \mathbb{R}\right)$

(iii) $\left\|\vec{u} + \vec{v}\right\|_{\bullet} \leq \left\|\vec{u}\right\|_{\bullet} + \left\|\vec{v}\right\|_{\bullet}$

Remarque

La propriété (iii) est appelée « inégalité triangulaire » car si on considère $\vec{u} + \vec{v}$ comme troisième côté du triangle formé avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors (iii) signifie que la longueur d'un côté du triangle est inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.

Définition

Soit *E* un espace préhilbertien. Soit $\vec{u} \in E$. Si $\left\|\vec{u}\right\|_{\bullet} = 1$, ou si de manière équivalente $\vec{u} \bullet \vec{u} = 1$, alors $\vec{u}$ est appelé un **vecteur unitaire**.

Proposition

Si $\vec{x} \neq \vec{0}_E$ un vecteur quelconque de E espace préhilbertien, alors le vecteur $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{x}\|}\vec{x}$ est unitaire et colinéaire à $\vec{x}$. On appelle $\vec{u}$ le **vecteur normé** associé à $\vec{x}$. Le procédé correspondant s'appelle la **normalisation**.

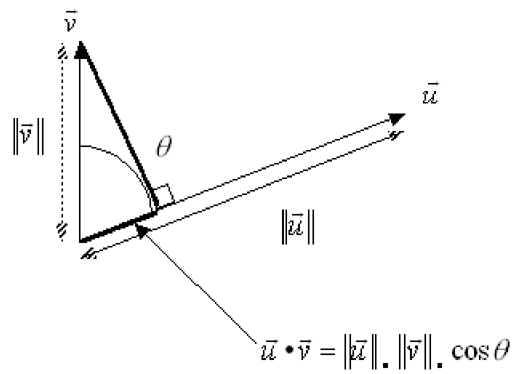
Remarque

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v} \in E$, l'angle que font entre eux les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'angle θ tel que $0 \leq \theta \leq \pi$ et :

$$\cos\theta = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{\|\vec{u}\|_\bullet \|\vec{v}\|_\bullet}$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz, $-1 \leq \cos\theta \leq 1$, et donc l'angle θ existe toujours et est unique.

Représentation graphique



3 Orthogonalité, projection

3.1 Définition

Définition

Soit E un espace préhilbertien. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont dits **orthogonaux** si et seulement si :

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$$

On dit aussi que $\vec{u}$ est **orthogonal** à $\vec{v}$.

Remarques

★ $\vec{0} \in E$ est orthogonal à tout vecteur $\vec{u} \in E$. En effet, $\vec{0} \bullet \vec{u} = (0\vec{u}) \bullet \vec{u} = 0(\vec{u} \bullet \vec{u}) = 0$.

★ Inversement, si $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de *E*, alors $\vec{u} = \vec{0}$. En effet, si $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur de *E*, alors en particulier $\vec{u} \bullet \vec{u} = 0$ et donc $\vec{u} = \vec{0}$.

★ $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ si et seulement si $\cos\theta = 0$, c'est-à-dire si et seulement si $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$.

3.2 Recherche de vecteurs orthogonaux

Dans le plan, il est parfois utile de savoir trouver rapidement les coordonnées d'un vecteur $\vec{v}$ orthogonal à un vecteur quelconque $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

Soit $\vec{v} = (v_1, v_2)$ orthogonal à $\vec{u}$. Alors $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0 \Leftrightarrow u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Si on suppose $u_1 \neq 0$, alors on a $v_1 = -\frac{u_2}{u_1} v_2$. L'ensemble des vecteurs orthogonaux à $\vec{u}$ est donc défini comme :

$$\left\{ \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \middle/ v_1 = -\frac{u_2}{u_1} v_2 \right\}$$

En particulier, si on pose $v_1 = -u_2$, alors $\vec{v} = (-u_2, u_1)$ est orthogonal à $\vec{u} = (u_1, u_2)$. De même, $\vec{v} = (u_2, -u_1)$ est orthogonal à $\vec{u} = (u_1, u_2)$.

<u>Exemple</u>

Soit $\vec{u} = (1,3)$. Alors $\vec{v} = (-3,1)$ est orthogonal à $\vec{u}$: $(1 \quad 3)\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = -3 + 3 = 0$.

3.3 Supplémentaire orthogonal

3.4 Ensembles orthogonaux

Définitions

★ Un ensemble $F = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ de vecteurs de *E*, un espace préhilbertien, est dit **orthogonal** si deux vecteurs quelconques de *F* sont orthogonaux : $\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = 0$, $\forall i \neq j$

★ F est dit **orthonormal**, si F est orthogonal et si tous les vecteurs de F sont unitaires :

$$\vec{u}_i \bullet \vec{u}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

Remarque

On peut normaliser un ensemble orthogonal en normalisant chacun des vecteurs.

<u>Théorème 1</u>

Soit F un ensemble orthogonal de vecteurs non nuls. Alors les vecteurs de F sont linéairement indépendants.

<u>Théorème 2</u> **: Pythagore**

Soit $F = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p\}$ un ensemble orthogonal. Alors :

$$\|\vec{u}_1 + \ldots + \vec{u}_p\|_\bullet^2 = \|\vec{u}_1\|_\bullet^2 + \ldots + \|\vec{u}_p\|_\bullet^2$$

Remarque

Ce dernier théorème permet de retrouver le théorème de Pythagore dans le cas du plan. En effet, si on considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan tels que $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, alors :

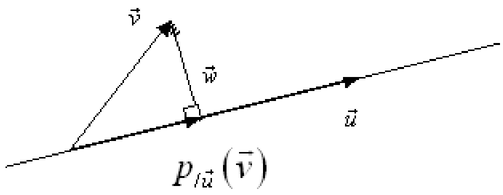
$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} + \vec{v}) \\ &= (\vec{u} \bullet \vec{u}) + 2(\vec{u} \bullet \vec{v}) + (\vec{v} \bullet \vec{v}) \\ &= (\vec{u} \bullet \vec{u}) + (\vec{v} \bullet \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

<u>Proposition</u>

La base canonique $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ est une ***base orthonormale***. En effet, $\forall i \neq j \quad \vec{e}_i \bullet \vec{e}_j = 0$ et $\forall i = 1, n \quad \|\vec{e}_i\|_\bullet = 1$.

3.5 Projecteur orthogonal

Soit $\mathbb{R}^n$ espace euclidien. Considérons une direction définie par un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Cherchons à caractériser la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur la direction définie par $\vec{u}$:



On cherche donc à caractériser le vecteur $p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ par rapport au vecteur $\vec{v}$.

Soit $\vec{w}$ et $p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ tels que par construction l'on ait :

$$\vec{v} = \vec{w} + p_{/\vec{u}}(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{w} = \vec{v} - p_{/\vec{u}}(\vec{v})$$

Or $p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc il peut s'écrire $p_{/\vec{u}}(\vec{v}) = \lambda \vec{u}$.

D'autre part, la caractéristique fondamentale de $p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ est que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$:

$$\begin{aligned}
\vec{w} \bullet \vec{u} = 0 &\Leftrightarrow \left[\vec{v} - p_{/\vec{u}}(\vec{v})\right] \bullet \vec{u} = 0 \\
&\Leftrightarrow p_{/\vec{u}}(\vec{v}) \bullet \vec{u} = \vec{v} \bullet \vec{u} \\
&\Leftrightarrow \left\| p_{/\vec{u}}(\vec{v}) \right\|_{\bullet} \left\| \vec{u} \right\|_{\bullet} = \vec{v} \bullet \vec{u} \\
&\Leftrightarrow \left\| \lambda \vec{u} \right\|_{\bullet} \left\| \vec{u} \right\|_{\bullet} = \vec{v} \bullet \vec{u} \\
&\Leftrightarrow \lambda \left\| \vec{u} \right\|_{\bullet} \left\| \vec{u} \right\|_{\bullet} = \vec{v} \bullet \vec{u} \\
&\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}}}
\end{aligned}$$

Définition 1

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^n$. Le **vecteur projeté** de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ est le vecteur :

$$p_{/\vec{u}}(\vec{v}) = \frac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}} \vec{u}$$

$p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v} - p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ lui est orthogonal.

Remarque

Le coefficient $\dfrac{\vec{v} \bullet \vec{u}}{\vec{u} \bullet \vec{u}}$ est appelé coefficient de Fourier de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$ ou composante de $\vec{v}$ sur $\vec{u}$.

Définition 2

Soit $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$. L'application $p_{/\vec{u}}$ de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ qui à $\vec{v}$ associe $p_{/\vec{u}}(\vec{v})$ est appelé **projecteur orthogonal** sur $\vec{u}$.

➔ Revoir la notion de projecteur.

4 Distance euclidienne

Définition

Soient $\vec{u} = (u_1, \ldots, u_n)$ et $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. La distance entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$, qui n'est autre que la distance entre les points extrémités des deux vecteurs, est définie par :

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$$

Proposition

Soit $\mathbb{R}^n$ espace euclidien. Alors :

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (u_i - v_i)^2}$$

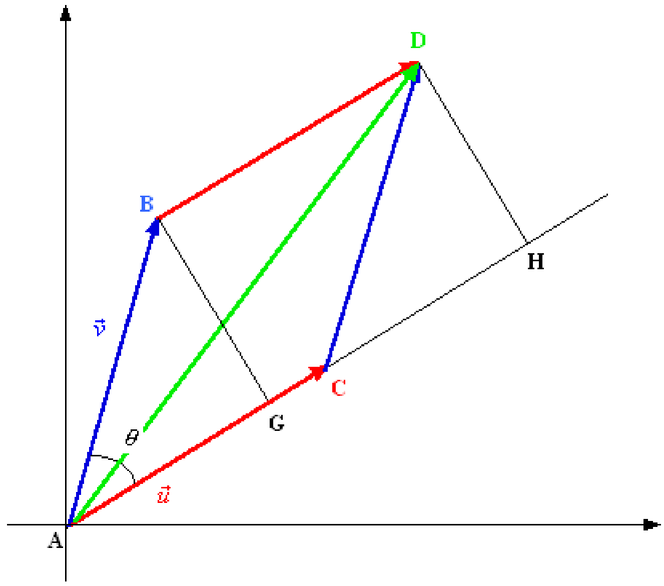
On parle de ***distance euclidienne***.

Exemple

On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni de sa base canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ et de son produit scalaire canonique.

Soit $\vec{u} = (1,3)$ et $\vec{v} = (-1,2)$. Calculer $d(\vec{u}, \vec{v})$. Réponse.

5 Déterminant et volume



Considérons le plan muni d'un repère d'origine A. On considère $\mathbb{R}^2$ espace euclidien.

Soient **A** de cordonnées $(0,0)$, **B** de coordonnées (x_1,x_2), **C** de coordonnées (y_1,y_2). On désigne par $\vec{u}$ le vecteur issu de **A** et d'extrémité **C** et par $\vec{v}$ le vecteur issu de **A** et d'extrémité **B**. Ainsi, $\vec{u}=(x_1,x_2)$ et $\vec{v}=(y_1,y_2)$. On appelle θ l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Nous allons cherche à démontrer la propriété énoncée au chapitre 3, paragraphe 4.4, à savoir que le déterminant de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égal à l'aire du parallélogramme ABDC.

On appelle respectivement G et H les projetés orthogonaux de B et D sur la direction définie par $\vec{u}$. Ainsi, l'aire du triangle ABG est égale à l'aire du triangle CDH, d'où l'on en déduit que l'aire du parallélogramme ABDC est exactement égale à l'aire du rectangle GBDH :

$$\mathcal{A}_{ABDC} = \mathcal{A}_{GBDH}$$

Or $\mathcal{A}_{GBDH} = BD \times BG$ avec $BD = AC = \|\vec{u}\|$ et $BG = AB\sin\theta = \|\vec{v}\|\sin\theta$. Donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{ABDC} &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta \\ &= \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\cos^2\theta} \\ &= \sqrt{\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}\bullet\vec{v})^2}\end{aligned}$$

En utilisant les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut écrire :

$$\|\vec{u}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 \qquad \|\vec{v}\|^2 = y_1^2 + y_2^2 \qquad \vec{u}\bullet\vec{v} = x_1y_1 + x_2y_2$$

Finalement :

$$
\begin{aligned}
A_{ABDC} &= \sqrt{\left(x_1^2+x_2^2\right)\left(y_1^2+y_2^2\right)-\left(x_1y_1+x_2y_2\right)^2} \\
&= \sqrt{\left(x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2\right)-\left(x_1^2y_1^2+x_2^2y_2^2+2x_1y_1x_2y_2\right)} \\
&= \sqrt{x_2^2y_1^2+x_1^2y_2^2-2x_1y_1x_2y_2} \\
&= \sqrt{\left(x_1y_2-x_2y_1\right)^2} \\
&= x_1y_2-x_2y_1 \quad \text{une aire étant toujours positive}
\end{aligned}
$$

En remarquant que $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=x_1y_2-x_2y_1$, on peut conclure que $\boxed{A_{ABDC}=\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)}$, autrement dit que le déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est bien égal à la surface du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs.

6 Exemples d'utilisation en Biologie

Les plantes de quatre espèces végétales E_1, E_2, E_3, E_4 ont été dénombrées sur un terrain subdivisé en trois parcelles disjointes A, B, C. Les résultats sont présentés sous la forme d'une matrice F :

$$
\mathbf{F}=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}
$$

où, par exemple, b_2 est le nombre de plantes de l'espèce E_2 présentes dans la parcelle B.

Soient p_1, p_2, p_3, p_4 les sommes des colonnes de la matrice $\mathbf{F}$; n_1, n_2, n_3 les sommes des lignes de la matrice $\mathbf{F}$: $p_i=a_i+b_i+c_i \quad i=1,4$ et $n_j=\sum_{i=1}^{i=4} a_i \quad j=1,3$.

Ainsi n_2 est le nombre total de plantes présentes dans la parcelle B ; tandis que p_2 est le nombre total de plantes de l'espèce E_2 présentes dans l'ensemble des trois parcelles.

Soit n le nombre total de plantes des quatre espèces présentes dans l'ensemble des trois parcelles : $n=\sum_{i=1}^{i=4} p_i=\sum_{j=1}^{j=3} n_j$.

Considérons les deux matrices suivantes :

$$
\mathbf{D}=\begin{pmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{\Delta}=\begin{pmatrix} n_1/n & 0 & 0 \\ 0 & n_2/n & 0 \\ 0 & 0 & n_3/n \end{pmatrix}
$$

Dans $\mathbb{R}^3$ (muni de sa base canonique), les colonnes de la matrice $\mathbf{X} = \mathbf{FD}^{-1}$ peuvent être considérées comme les coordonnées, exprimées en %, des quatre points E_1, E_2, E_3, E_4 représentants les quatre espèces végétales :

$$\mathbf{X} = \mathbf{FD}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/p_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/p_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/p_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1/p_1 & a_2/p_2 & a_3/p_3 & a_4/p_4 \\ b_1/p_1 & b_2/p_2 & b_3/p_3 & b_4/p_4 \\ c_1/p_1 & c_2/p_2 & c_3/p_3 & c_4/p_4 \end{pmatrix}$$

Par cette opération matricielle, on a en fait *normalisé* les colonnes de **F** ($p_i = a_i + b_i + c_i$).

Nous allons tenter de voir si les quatre espèces végétales sont équi-réparties au sein des trois parcelles, *i.e.* si les proportions des quatre espèces sont les mêmes quelle que soit la parcelle.

Si on appelle G le point de coordonnées $\left(\frac{n_1}{n}, \frac{n_2}{n}, \frac{n_3}{n}\right)$, cela revient d'un point de vue géométrique, à situer les quatre point E_1, E_2, E_3, E_4 par rapport à ce point G. G représente le barycentre des espèces. Si un point E_i est proche de G, alors on pourra dire que cette espèce est équi-répartie au sein des trois parcelles.

D'un point de vue mathématique, il faut calculer les distances $d(\mathrm{G},\mathrm{E_i})$, les distances les plus petites correspondront aux espèces les mieux équi-réparties au sein des trois parcelles.

$$\mathrm{E_i} = \begin{pmatrix} a_i/p_i \\ b_i/p_i \\ c_i/p_i \end{pmatrix} \quad i = 1,4 \qquad d(\mathrm{G},\mathrm{E_i}) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{GE_i}}\right\| \qquad \overrightarrow{\mathrm{GE_i}} = \begin{pmatrix} a_i/p_i - n_1/n \\ b_i/p_i - n_2/n \\ c_i/p_i - n_3/n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $d(\mathrm{G},\mathrm{E_i}) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{GE_i}}\right\| = \sqrt{(a_i/p_i - n_1/n)^2 + (b_i/p_i - n_2/n)^2 + (c_i/p_i - n_3/n)^2}$.

Application numérique : considérons la matrice **F** suivante :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 17 & 2 \\ 15 & 22 & 2 & 14 \\ 3 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$p_1 = 24, p_2 = 33, p_3 = 25, p_4 = 18 \qquad n_1 = 32, n_2 = 53, n_3 = 15 \qquad n = 100$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0.250 & 0.212 & 0.680 & 0.111 \\ 0.625 & 0.666 & 0.08 & 0.777 \\ 0.125 & 0.121 & 0.240 & 0.111 \end{pmatrix} \text{ avec } \mathrm{G} = \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.53 \\ 0.15 \end{pmatrix}$$

Ainsi $\overrightarrow{GE_1} = \begin{pmatrix} -0.070 \\ 0.095 \\ -0.025 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GE_2} = \begin{pmatrix} -0.108 \\ 0.136 \\ -0.029 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GE_3} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ -0.45 \\ 0.09 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GE_4} = \begin{pmatrix} -0.209 \\ 0.247 \\ -0.039 \end{pmatrix}$.

Alors $\left\|\overrightarrow{GE_1}\right\| = 0.120$, $\left\|\overrightarrow{GE_2}\right\| = 0.176$, $\left\|\overrightarrow{GE_3}\right\| = 0.583$ et $\left\|\overrightarrow{GE_4}\right\| = 0.326$.

Nous pouvons finalement conclure que, dans cet exemple numérique, c'est l'espère 1 qui la mieux équi-répartie au sein des trois parcelles.