Mathématiques Appliquées à la Biologie
Modélisation dynamique
I - Modèles dans $\mathbb{R}$

S. Charles
sandrine.charles@univ-lyon1.fr

D'après un document de Sylvain MOUSSET
-
Université Claude Bernard Lyon I – France

2 septembre 2019

Table des matières

Plan détaillé

Les modèles **linéaires** dans $\mathbb{R}$

- Ce sont les modèles les plus simples ;

  Par exemple $\frac{dx(t)}{dt} = ax(t)$ avec $a \in \mathbb{R}$
- Une analyse *quantitative* complète est possible, par résolution exacte des équations ;
- En complément, une analyse *qualitative* permet de décrire le comportement du modèle (allure des solutions).

Plan détaillé

Un premier exemple : le modèle de Malthus

Le modèle de Malthus (ou modèle exponentiel) est l'un des premiers modèles de dynamique des populations (1792). Les hypothèses de ce modèle sont les suivantes :

- On considère une population de taille $N(t)$ dont tous les individus sont identiques (pas de variabilité inter-individus) ;
- On suppose constant le taux d'accroissement **par unité de temps** de la population quel que soit $N(t)$;
- On néglige les processus de migration des individus.

Question : Comment la taille de la population évolue-t-elle au cours du temps ?

Les variables et les paramètres du modèle de Malthus

La variable

Elle varie au cours du temps (processus dynamique).
$N(t)$: la taille de la population au temps t.

Le paramètre

Il est fixé et constant pour toute la durée de l'expérience.
Ici le "taux d'accroissement" intrinsèque de la population par unité de temps, que l'on note r.

On peut voir r comme le résultat de la balance entre les naissances (taux b, *birth*) et les morts (taux d, *death*) : $r = b - d$.
Intuitivement, si $b > d$ $(r > 0)$, on devine qu'il y aura croissance.

L'équation du modèle de Malthus

L'évolution la taille de la population au cours du temps vérifie alors :

$$dN(t) = rN(t)dt \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

Il s'agit d'une EDO d'ordre 1 autonome linéaire.

Les solutions exactes du modèle de Malthus

On résout l'équation différentielle (équation à variables séparables) :

$$\begin{aligned}
\frac{dN(t)}{dt} &= r\,N(t) \\
\Leftrightarrow \quad \frac{dN(t)}{N(t)} &= r\,dt \\
\Leftrightarrow \quad \ln(N(t)) &= r\,t + C \\
\Leftrightarrow \quad N(t) &= e^{C}\,e^{r\,t} \\
\Leftrightarrow \quad N(t) &= N_0 e^{r\,t}
\end{aligned}$$

avec $e^C = N_0 = N(0)$, la condition initiale.
L'expression de $N(t)$ justifie l'appellation "modèle exponentiel".

Représentation graphique des solutions : Chroniques

L'allure des solutions $N(t)$ change selon le signe de r.

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)$$

$$N(t) = N_0 e^{rt}$$

$$N(0) = 50$$

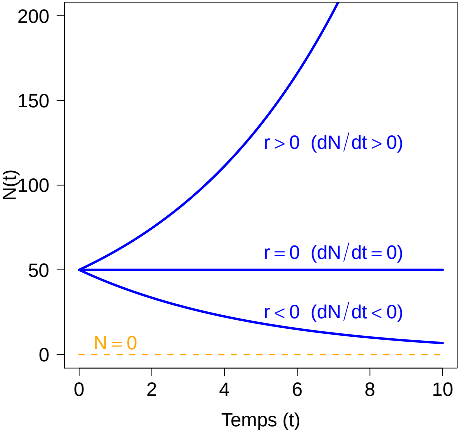


Table des matières

Plan détaillé

Le modèle logistique, une alternative au modèle de Malthus

Pierre-François Verhulst (1838)

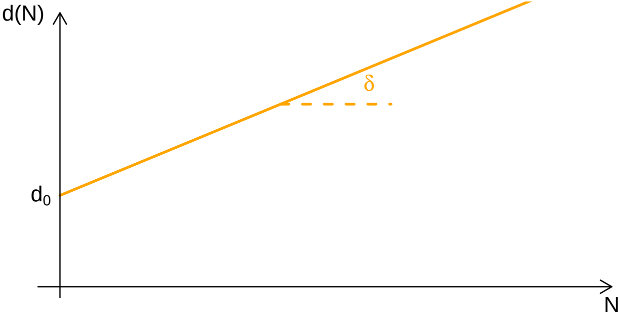
Biologiquement, le modèle de dynamique des populations de Malthus est critiquable :

- Le taux de croissance r ne dépend pas de la taille de la population ;
- Il fait l'hypothèse implicite de ressources et d'espace illimités ;
- Il mène à l'extinction de la population $(r < 0)$ ou à une explosion démographique $(r > 0)$.

Pour mémoire, dans le modèle de Malthus, on a
$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \Leftrightarrow N(t) = N_0 e^{rt}$ avec $r = b - d$
où b est le taux de natalité et d le taux de mortalité.

Les hypothèses du modèle logistique

- Le taux de natalité est constant : $b = b_0$;
- Le taux de mortalité croît avec l'effectif : $d = d_0 + \delta N$ avec $\delta > 0$;
- À faible effectif il y a croissance : $b_0 > d_0$.



Les hypothèses du modèle logistique

- Le taux de natalité est constant : $b = b_0$;
- Le taux de mortalité croît avec l'effectif : $d(N(t)) = d_0 + \delta N(t)$ avec $\delta > 0$;
- À faible effectif il y a croissance : $b_0 > d_0$.

Le taux de croissance intrinsèque de la population devient donc **densité-dépendant**, *i.e.* dépendant de N :

$$r(N(t)) = b - d = b_0 - d(N(t)) = b_0 - (d_0 + \delta N(t))$$

La variation de l'effectif $dN(t)$ durant l'intervalle de temps dt est :

$$dN(t) = (b_0 - d_0 - \delta N(t))N(t)dt$$

Les équations du modèle logistique

$$dN(t) = (b_0 - d_0 - \delta N(t))N(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = (b_0 - d_0)N(t) - \delta N(t)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = (b_0 - d_0)N(t)\left(1 - \frac{\delta N(t)}{b_0 - d_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

avec $r = b_0 - d_0$ et $K = \dfrac{r}{\delta}$.

$r > 0$ puisqu'on a fait l'hypothèse que $b_0 > d_0$. On a $K > 0$.

Les équations du modèle logistique

$$dN(t) = (b_0 - d_0 - \delta N(t))N(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = (b_0 - d_0)N(t) - \delta N(t)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = (b_0 - d_0)N(t)\left(1 - \frac{\delta N(t)}{b_0 - d_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) = rN(t) - \frac{r}{K}N^2(t)$$

On parle de freinage logistique (ralentissement de la croissance pour des valeurs de $N(t)$ grandes).

Plan détaillé

La solution du modèle logistique

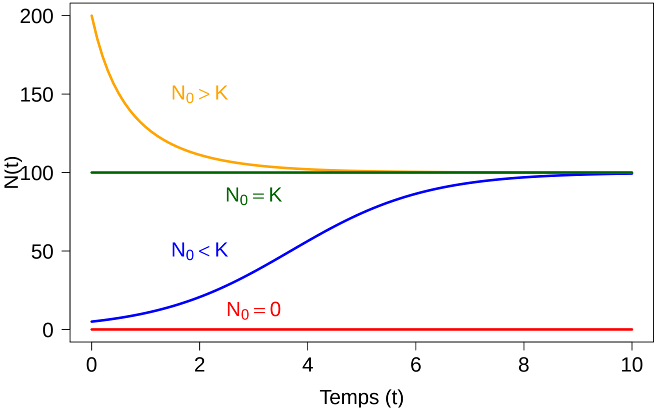
$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$$

$$\hookrightarrow N(t) = \frac{N_0 K}{N_0 + (K - N_0)e^{-rt}} \quad \text{avec} \quad N(t=0) = N_0$$

- Si $N_0 = 0$, alors $\forall t, N(t) = 0$ (condition initiale) ;
- Si $N_0 = K$, alors $\forall t, N(t) = K$;
  $\rightarrow$ On a donc **deux solutions constantes**
- $\lim\limits_{t\to\infty} N(t) = K$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} e^{-rt} = 0$ si $r > 0$.

$\Rightarrow$ K est ce que l'on appelle la **capacité limite**, c'est-à-dire la taille maximale que peut théoriquement atteindre la population.

Représentation graphique des solutions : Chroniques



Propriétés du modèle logistique

Avec le modèle logistique, on voit que l'étude quantitative (la recherche des solutions exactes) se complique.

Il paraît alors plus intéressant d'étudier simplement ses propriétés :

- Existe-t-il des solutions constantes, qu'on appelle des **points d'équilibre** ?
- Comment la dynamique évolue-t-elle en dehors de ces points d'équilibre, *i.e.*, les chroniques sont-elles croissantes ou décroissantes ?
- Quelle est l'allure des chroniques ?

Plan détaillé

Les points d'équilibre

Le cas du modèle logistique

Un point d'équilibre N^* du modèle correspond à une solution constante c'est-à-dire une solution pour laquelle $\frac{dN^*}{dt} = 0$.

$$\frac{dN^*}{dt} = 0 \Leftrightarrow rN^*\left(1 - \frac{N^*}{K}\right) = 0$$

Cette équation a deux solutions, c'est-à-dire qu'il existe **deux points d'équilibre** :

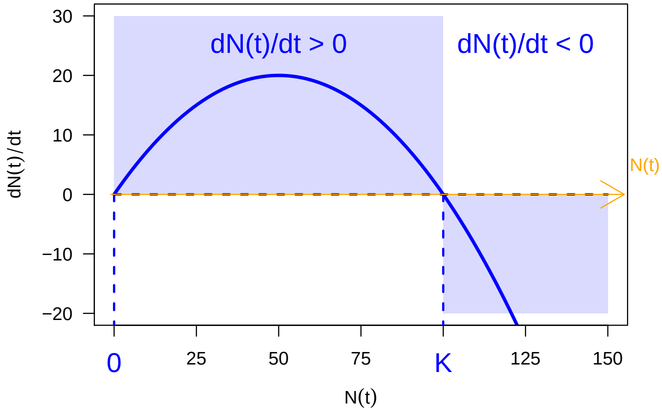
$$N_0^* = 0 \quad \text{et} \quad N_1^* = K$$

Question : toute autre solution $N(t)$ va-t-elle tendre à se rapprocher de ces points d'équilibre ou bien à s'en éloigner ?

L'évolution du système entre les points d'équilibre (1)

Le cas du modèle logistique

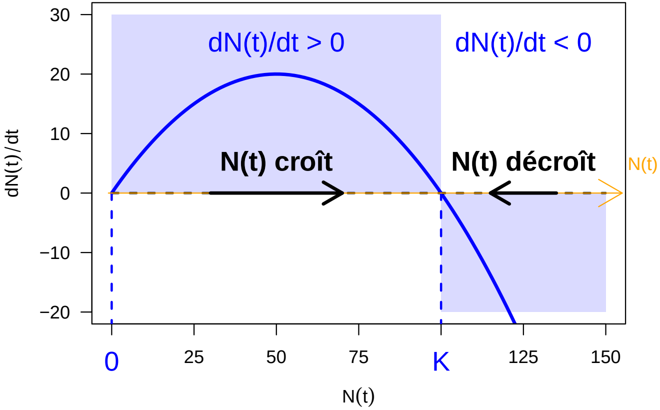
$N(t) \uparrow$ ou $\downarrow$ selon le signe de $\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$:



L'évolution du système entre les points d'équilibre (3)

Le cas du modèle logistique

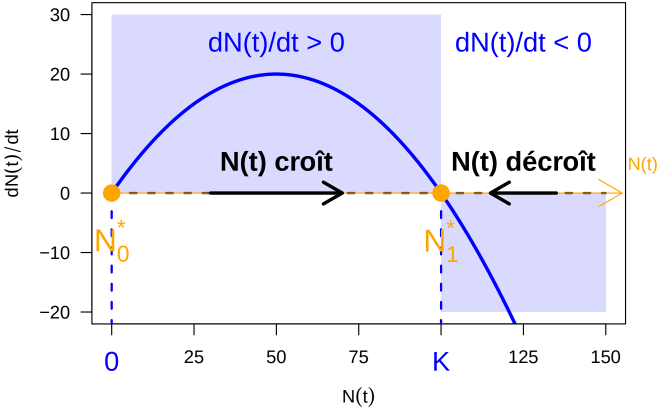
Le signe de $\frac{dN}{dt}$ indique le sens d'évolution de N :



L'évolution du système entre les points d'équilibre (2)

Le cas du modèle logistique

Aux points d'équilibre N_0^* et N_1^* : $\frac{dN}{dt} = 0$.

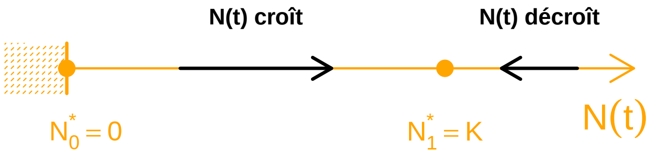


Plan détaillé

Portrait de phase

Le cas du modèle logistique

Le **portrait de phase** d'une EDO dans ℝ symbolise les points d'équilibre et le sens de variation des solutions entre ces points d'équilibre.

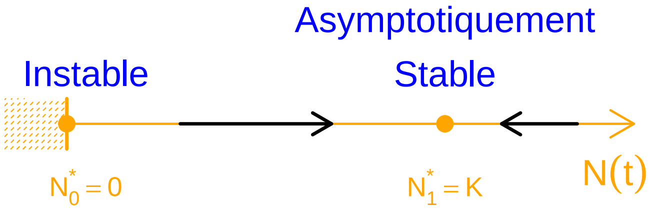


Stabilité des points d'équilibre

Le cas du modèle logistique

Si les solutions convergent vers un point d'équilibre, on dira qu'il est **asymptotiquement stable**.

Si les solutions s'éloignent d'un point d'équilibre, on dira qu'il est **instable**.



Plan détaillé

Les chroniques (1)

Le cas du modèle logistique

Les chroniques sont la représentation graphique des solutions.

Elles ont les propriétés suivantes :

- Elles ne se coupent jamais pour des équations autonomes ;
- Au voisinage des points d'équilibre, la pente des chroniques tend à devenir nulle (horizontale) ;
- La chronique passant par le point $(N, t+h)$ s'obtient par **translation horizontale** d'une valeur h de la chronique passant par le point (N, t).

Les chroniques (2)

Le cas du modèle logistique

Allure des chroniques pour différentes conditions initiales :

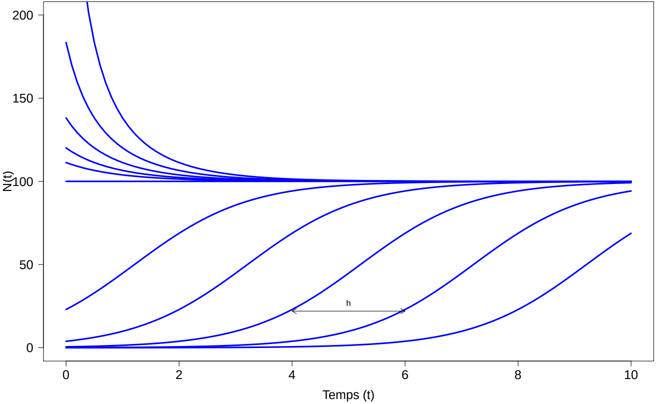


Table des matières

Analyse qualitative dans ℝ

Comme nous l'avons vu sur le cas du modèle logistique, il est possible d'effectuer une analyse **qualitative** d'un modèle quelconque, en particulier lorsque l'EDO correspondante est trop complexe pour être résolue explicitement.

Analyse quantitative
- Recherche des solutions exactes ;
- Étude de fonction pour tracer les solutions.

Analyse qualitative
- Recherche des points d'équilibre ;
- Etude de la stabilité des points d'équilibre ;
- Portrait de phase ;
- Allure des chroniques.

Plan détaillé

Les points d'équilibre

Les points d'équilibre x^* d'un modèle quelconque de la forme $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ satisfont :

$$\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{x(t)=x^*} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f(x^*) = 0.$$

Rechercher les points d'équilibre d'un système $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$ revient donc à trouver les solutions de l'équation $f(x) = 0$.

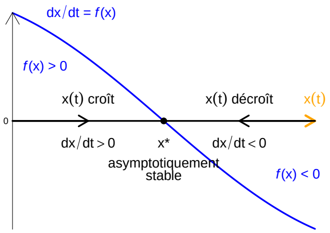
Un modèle peut n'avoir aucun point d'équilibre, un nombre fini ou un nombre infini de points d'équilibre.

Plan détaillé

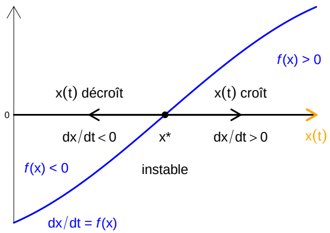
Stabilité des points d'équilibre $(1-2)$

Si dans un modèle quelconque $\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t))$, la fonction f est continue, alors il suffit d'**étudier le signe de** f au voisinage des points d'équilibre pour connaître leur stabilité.
Il y a **quatre configurations** possibles.

x^* asymptotiquement stable

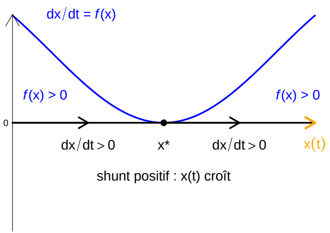


x^* instable

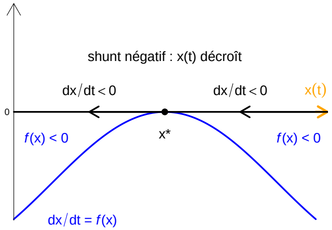


Stabilité des points d'équilibre $(3-4)$

x^* shunt positif



x^* shunt négatif



Stabilité des points d'équilibre

⇒ Autre méthode : la linéarisation

On utilise la formule de Taylor à l'ordre 1 pour linéariser $f(x)$ **au voisinage des points d'équilibre** x^*, et donc trouver une expression approchée de $\frac{dx}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\approx \underbrace{f(x^*)}_{} + \underbrace{f'(x^*)}_{} (x - x^*) \\ &\approx 0 + \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^*} (x - x^*) \end{aligned}$$

On a donc bien trouvé une approximation de $\frac{dx}{dt}$ par une **droite** d'équation $y = \lambda^*(x - x^*)$ avec $\lambda^* = \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^*}$.

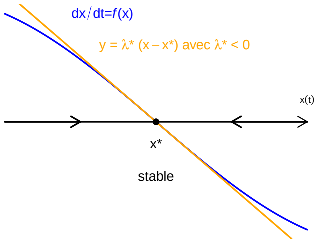
⇒ La stabilité de x^* va dépendre du signe de λ^*, si $\lambda^* \neq 0$.

Stabilité des points d'équilibre

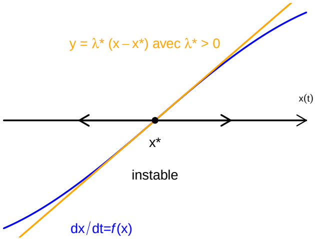
⇒ Autre méthode : la linéarisation

$\lambda^* = \left.\dfrac{df(x)}{dx}\right|_{x=x^*}$ est la pente de la tangente à la courbe représentative de $f(x)$ au point d'équilibre $x = x^*$.

$\lambda^* < 0 \Rightarrow x^*$ asympT stable



$\lambda^* > 0 \Rightarrow x^*$ instable



⚠ **si $\lambda^* = 0$, alors on ne peut pas conclure.**

Plan détaillé

Points d'inflexion

Les points d'inflexion $x_i(t)$ des chroniques d'un modèle de la forme $\frac{dx}{dt} = f(x)$ sont les points pour lesquels :

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d^2 x_i}{dt^2} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dx}{dt}\right) = \dfrac{df(x_i(t))}{dt} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{df(x_i)}{dx}\dfrac{dx_i}{dt} = 0 \\[2em] \dfrac{dx_i}{dt} \neq 0 \quad (\neq \text{ points d'équilibre}) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{df(x_i)}{dx} = 0$$

Les points d'inflexion $x_i(t)$ des solutions $x(t)$ du modèle correspondent donc aux extremums de la fonction $f(x)$.

Points d'inflexion

Le cas du modèle logistique

L'équation du modèle logistique vu précédemment est :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{K}) = rN(t) - \frac{rN(t)^2}{K} = f(N(t))$$

Il y a deux points d'équilibre : $N_0^* = 0$ et $N_1^* = K$.
Les points d'inflexion des chroniques vérifient :

$$\frac{df(N_i)}{dN} = 0 \iff r\left(1 - \frac{2N_i}{K}\right) = 0 \iff N_i = \frac{K}{2}$$

Points d'inflexion

Le cas du modèle logistique

Les chroniques du modèle logistique présentent donc un point d'inflexion pour $N_i = \frac{K}{2}$.

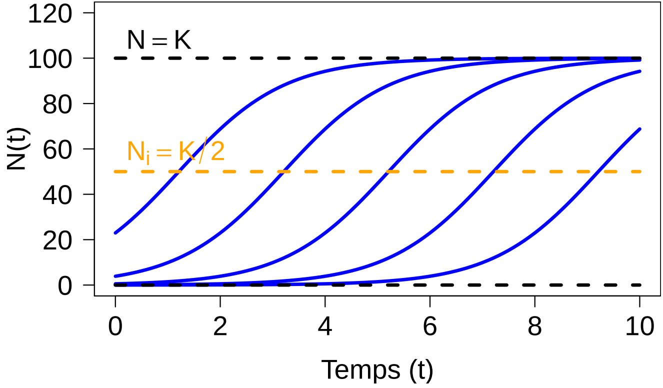


Table des matières

Plan détaillé

Le modèle de Gompertz

Un concurrent du modèle logistique

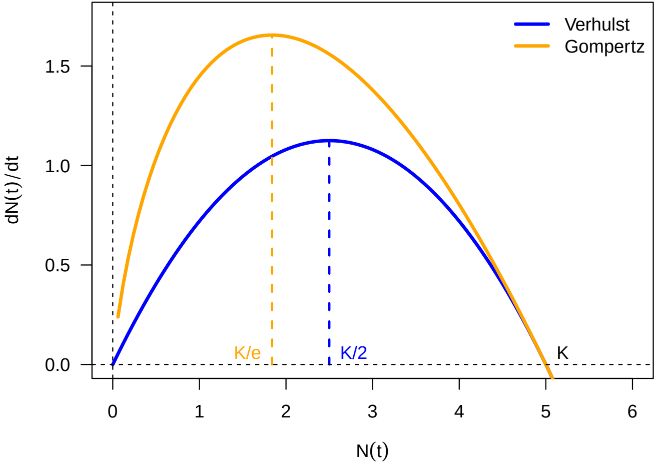
A l'instar du modèle logistique, le modèle de Gompertz est un modèle de dynamique des populations. Son équation est la suivante :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) \Leftrightarrow \frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(\ln K - \ln N(t))$$

avec $r > 0$ le taux d'accroissement de la population par unité de temps et K la capacité limite.

Comparaison Verhulst / Gompertz

Le taux d'accroissement



Le modèle de Gompertz

Recherche de points d'équilibre

Les points d'équilibre vérifient $\frac{dN(t)}{dt} = 0 \Leftrightarrow f(N^*) = 0$ avec $f(N) = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right)$.

$$\begin{aligned} & rN^* \ln\left(\frac{K}{N^*}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & N^* \neq 0 \ \text{ donc } \ \ln\left(\frac{K}{N^*}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{K}{N^*} = 1 \\ \Leftrightarrow\ & N^* = K \end{aligned}$$

Il y a donc un point d'équilibre $N_1^* = K$.

Le modèle de Gompertz

Stabilité des points d'équilibre : linéarisation

Il faut d'abord calculer $\left.\frac{df(N)}{dN}\right|_{N^*}$ avec

$$f(N) = rN(t)\ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) = rN(\ln K - \ln N) = rN\ln K - rN\ln N$$

$$\frac{df(N)}{dN} = r\ln K - r\ln N - rN\frac{1}{N} = r\left(\ln\left(\frac{K}{N}\right) - 1\right) = \lambda$$

$$\lambda^* = \left.\frac{df(N)}{dN}\right|_{N_1^*=K} = -r < 0$$

donc $N_1^* = K$ est localement **asymptotiquement stable**.

Le modèle de Gompertz

Recherche des points d'inflexion

$$\frac{dN}{dt} = rN = \ln\left(\frac{N}{K}\right)$$

Les points d'inflexion des solutions $N(t)$ du modèle de Gompertz correspondent aux extremums de la fonction $f(N)$:

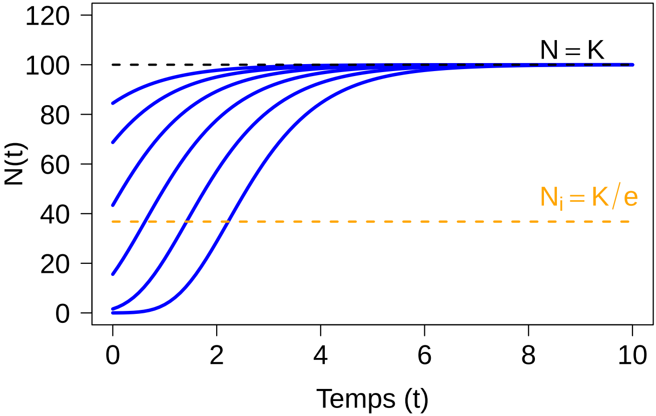
$$\frac{df(N)}{dN} = r\left(\ln\left(\frac{K}{N}\right) - 1\right)$$

$$\frac{df(N)}{dN} = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{K}{N}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{K}{N} = e \Leftrightarrow N = Ke^{-1}$$

Les chroniques du modèle de Gompertz présentent donc un point d'inflexion pour $N_i = Ke^{-1}$ avec $e \sim 2.718$.

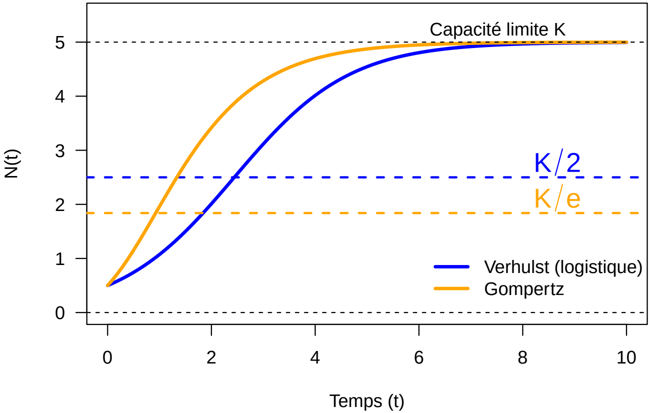
Le modèle de Gompertz

Chroniques



Comparaison Verhulst / Gompertz

Les chroniques



Plan détaillé

Les modèles de populations exploitées

Les modèles de populations exploitées sont utilisés pour leur intérêt commercial ou écologique. De nombreux modèles ont été proposés, ils sont toujours composés :

- D'une partie qui décrit la croissance (Verhulst, Gompertz...) ;
- D'une partie qui décrit l'exploitation (constante, linéaire, non linéaire...).

Dans ce cours, nous verrons les deux modèles de populations exploitées les plus connus. Pour chaque modèle, la croissance de la population sera de type logistique (modèle de Verhulst) :

$$\frac{dN(t)}{dt} = croissance - exploitation$$

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - exploitation$$

L'exploitation de la population

L'exploitation d'une population consiste à prélever des individus dans cette population à chaque pas de temps. Le terme mathématique pour formaliser ce prélèvement peut-être :

- Constant (quota) ;
- Proportionnel à la taille de la population ;
- Non linéaire et croissant avec la taille de la population.

Plan détaillé

Le modèle de pêche à effort constant

Équation du modèle de pêche à effort constant

Ici, on considère un effort de pêche $E > 0$ constant, c'est-à-dire que la quantité d'individus prélevés par unité de temps est proportionnelle à la taille de la population : $EN(t)$.

On a alors :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t)$$

Le modèle de pêche à effort constant

Recherche des points d'équilibre

On résout $\frac{dN}{dt} = 0$:

$$rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN = 0$$

$$\Leftrightarrow N\left(r\left(1 - \frac{N}{K}\right) - E\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow N = 0 \text{ ou } 1 - \frac{N}{K} = \frac{E}{r}$$

Il y a donc deux points d'équilibre :
$N_0^* = 0$ et $N_1^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right) < K$

N_1^* n'a de sens biologique que si $N_1^* > 0$, c'est-à-dire $r > E$ soit, le taux d'accroissement r de la population est plus élevé que le taux d'exploitation E.

Le modèle de pêche à effort constant

Optimum de l'effort de pêche

Dans le cas où $r > E$ (N_1^* a du sens), on peut se poser la question d'un optimum de l'effort de pêche permettant d'obtenir le prélèvement le plus élevé possible tout en assurant le maintien de la population.

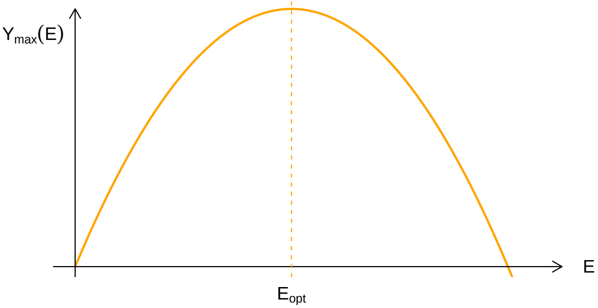
Si on note $Y(E) = EN$ la capture par unité de temps. On cherche alors E tel que la capture au point d'équilibre $\left(Y_{max}(E) = EN_1^*\right)$ soit maximale :

$$Y_{max}(E) = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right) = KE - K\frac{E^2}{r}$$

Le modèle de pêche à effort constant

Optimum de l'effort de pêche

$$Y_{max}(E) = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right) = KE - K\frac{E^2}{r}$$



Le modèle de pêche à effort constant

Optimum de l'effort de pêche

La capture $Y_{max}(E)$ sera maximum pour un effort de pêche E_{opt} optimum :

$$Y_{max}(E) = EK\left(1 - \frac{E}{r}\right) = KE - K\frac{E^2}{r}$$

$$\frac{dY_{max}(E)}{dE} = K - 2K\frac{E}{r} = K\left(1 - 2\frac{E}{r}\right)$$

$$\frac{dY_{max}(E)}{dE} = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\frac{E}{r} = 0$$

$$E_{opt} = \frac{r}{2}$$

À E_{opt}, la population a une taille $N^*_{opt} = K\left(1 - \frac{E_{opt}}{r}\right) = \frac{K}{2}$.

La capture maximum correspondante est $Y_{max}(E_{opt}) = \dfrac{rK}{4}$.

Le modèle de pêche à effort constant

Stabilité des points d'équilibre

Procédons comme précédemment par un raisonnement graphique :

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN$$

Les points d'équilibre seront à l'intersection de la parabole (partie logistique) et de la droite d'équation $y = EN$ (de pente égale à E).

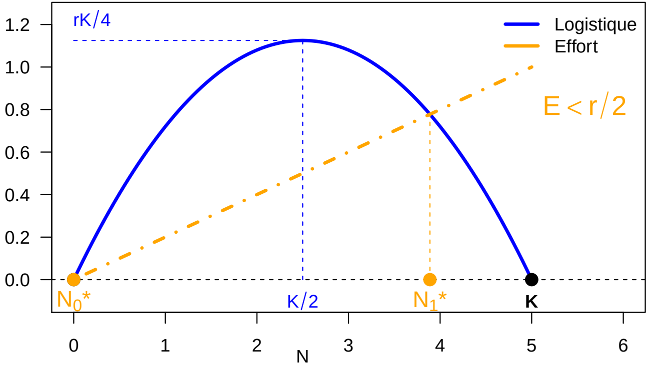
$\frac{dN}{dt} > 0$ lorsque $rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) > EN$ (respectivement $<$).

Rappelons que les résultats dépendent de la position de r par rapport à E, avec le cas particulier de $E_{opt} = \frac{r}{2}$ qui correspond à la capture maximum.

Le modèle de pêche à effort constant

Stabilité des points d'équilibre : $r > E$

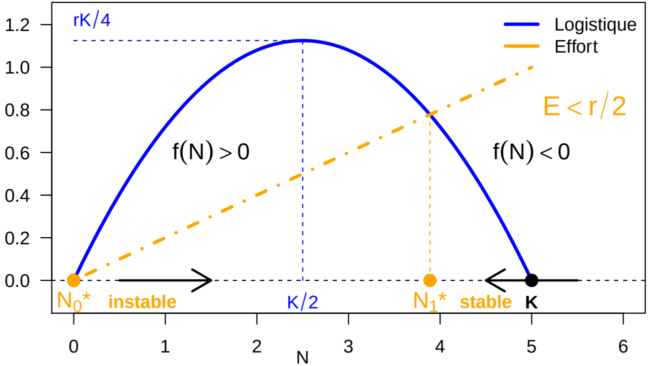
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN \quad \text{avec} \quad N_1^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$$



Le modèle de pêche à effort constant

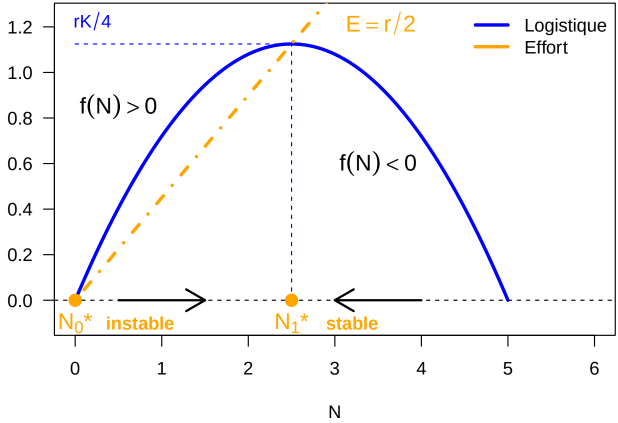
Stabilité des points d'équilibre : $r > E$

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - EN \quad \text{avec} \quad N_1^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$$



Le modèle de pêche à effort constant

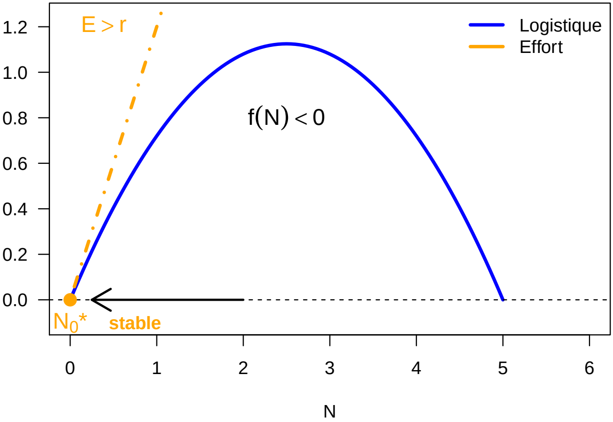
Stabilité des points d'équilibre : $E_{opt} = \frac{r}{2}$ (effort optimal)



Le modèle de pêche à effort constant

Stabilité des points d'équilibre : $r < E$

La population va à l'extinction.



Le modèle de pêche à effort constant

Conclusions

- Deux points d'équilibre tant que $r > E$;
- Un point d'équilibre instable $\left(N_0^* = 0\right)$ et un point d'équilibre asymptotiquement stable $\left(N_1^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right) < K\right)$;
- $N_1^* = K\left(1 - \frac{E}{r}\right)$: plus E est grand plus l'équilibre s'éloigne de la capacité limite K ;
- La population ne s'éteint que lorsque $E > r$.

Table des matières

Conclusions

Analyse des modèles dynamiques dans $\mathbb{R}$

Nous avons appris à effectuer l'analyse qualitative d'un modèle dynamique quelconque dans $\mathbb{R}$ du type $\frac{dx}{dt} = f(x)$

- Recherche de points d'équilibre : $f(x^*) = 0$;
- Étude de la stabilité : signe de f entre les points d'équilibre ou linéarisation de f au voisinage des points d'équilibre ;
- Étude de l'allure des chroniques : courbes représentatives des solutions $x(t)$ de l'équation de $\frac{dx}{dt} = f(x)$.

Retrouvez tous les détails et plus encore sur :

http://bmm.univ-lyon1.fr

Conclusions

Modèles de dynamique des populations

Nous avons, dans ce premier chapitre, envisagé des modèles de dynamique des populations impliquant une seule population. Cependant nous pourrions aussi envisager la dynamique de populations **en interactions** :

- Interactions proies/prédateurs (ou hôtes/parasites) ;
- Compétition ;
- Mutualisme...

Nous verrons ces interactions dans le dernier chapitre de ce cours, en nous focalisant sur les interactions entre deux populations. Ainsi, nous aborderons l'étude des systèmes de deux EDO du premier ordre couplées, c'est-à-dire **l'étude des systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$**.