

Mathématiques Appliquées à la Biologie

Modélisation dynamique

II - Modèles dans \mathbb{R}^2

S. Charles

sandrine.charles@univ-lyon1.fr

D'après un document de Sylvain MOUSSET

Université Claude Bernard Lyon I – France

6 octobre 2020

Table des matières

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Autres exemples

Plan détaillé

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les équations du modèle

Portrait de phase

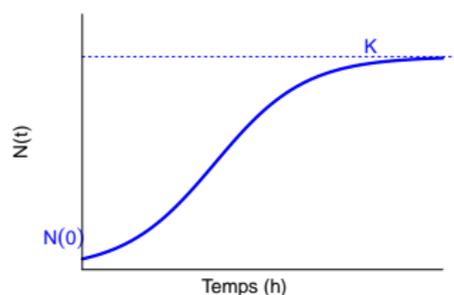
Définitions

Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

En l'absence d'interaction

Les proies N

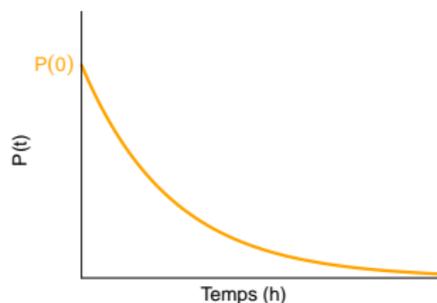
- croissance logistique, paramètres r et K .



$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

Les prédateurs P

- décroissance exponentielle, paramètre μ .



$$\frac{dP}{dt} = -\mu P$$

Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Avec les interactions proies-prédateurs

Si les déplacements de proies et prédateurs se font au hasard, alors le nombre de rencontres entre proies et prédateurs est proportionnel au produit NP .

Les proies N

- ▶ Consommation à la vitesse αNP .
- ▶ α caractérise l'efficacité des attaques des prédateurs.

Les prédateurs

- ▶ Reproduction à la vitesse βNP .
- ▶ β caractérise le rendement des attaques en termes de reproduction des prédateurs.

Le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les équations du modèle

On a le système de deux EDO du premier ordre suivant :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

avec les variables $N(t)$ et $P(t)$.

Dans le plan (N, P) , on peut étudier le signe de $\frac{dN}{dt}$ et $\frac{dP}{dt}$, et donc les variations de $N(t)$ et $P(t)$.

C'est ce qu'on appelle le **portrait de phase**.

Plan détaillé

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les équations du modèle

Portrait de phase

Définitions

Portrait de phase

Signe de $\frac{dN}{dt}$

L'évolution du nombre de proies dépend du signe de $\frac{dN}{dt}$:

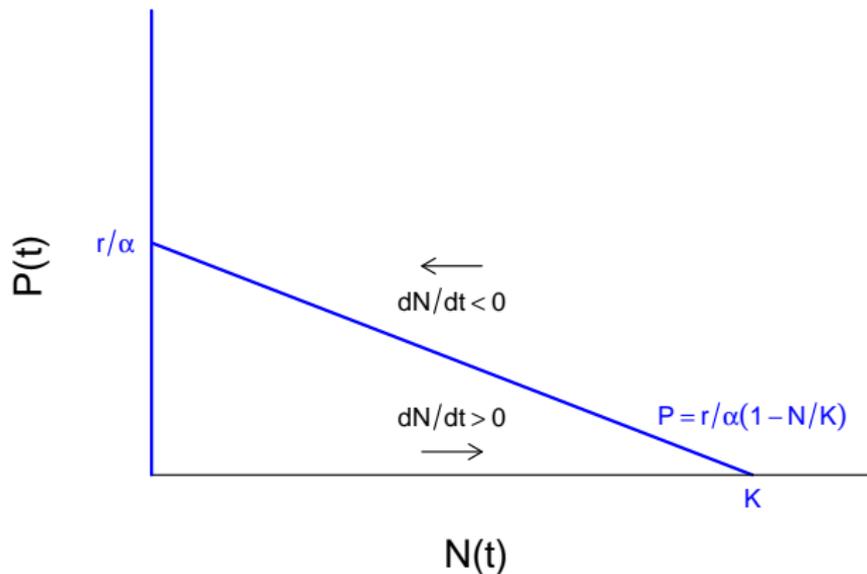
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \text{ avec } N, P > 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} > 0 &\Leftrightarrow rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP > 0 \\ &\Leftrightarrow N\left(r - \frac{rN}{K} - \alpha P\right) > 0 \\ &\Leftrightarrow P < \frac{r}{\alpha}\left(1 - \frac{N}{K}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \text{ pour } N = 0 \text{ et } P = \frac{r}{\alpha}\left(1 - \frac{N}{K}\right).$$

Portrait de phase

Signe de $\frac{dN}{dt}$



Portrait de phase

Signe de $\frac{dP}{dt}$

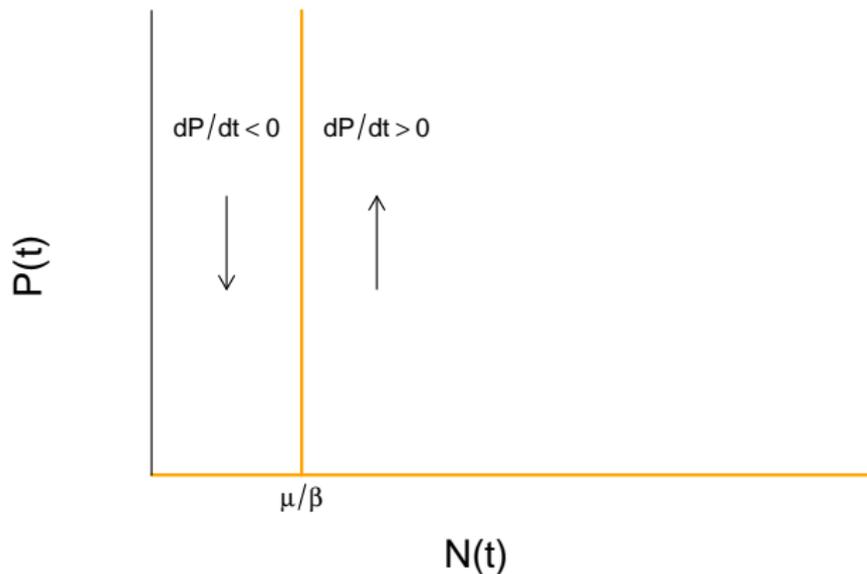
L'évolution du nombre de prédateurs dépend du signe de $\frac{dP}{dt}$:
 $\frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP$ avec $N, P > 0$.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} > 0 &\Leftrightarrow -\mu P + \beta NP > 0 \\ &\Leftrightarrow P(\beta N - \mu) > 0 \\ &\Leftrightarrow N > \frac{\mu}{\beta}\end{aligned}$$

$$\frac{dP}{dt} = 0 \text{ pour } P = 0 \text{ et } N = \frac{\mu}{\beta}.$$

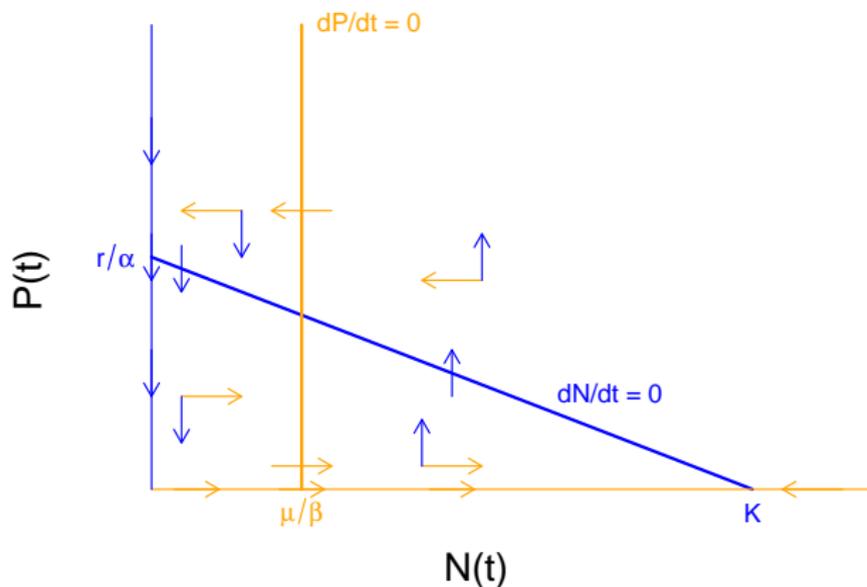
Portrait de phase

Signe de $\frac{dP}{dt}$



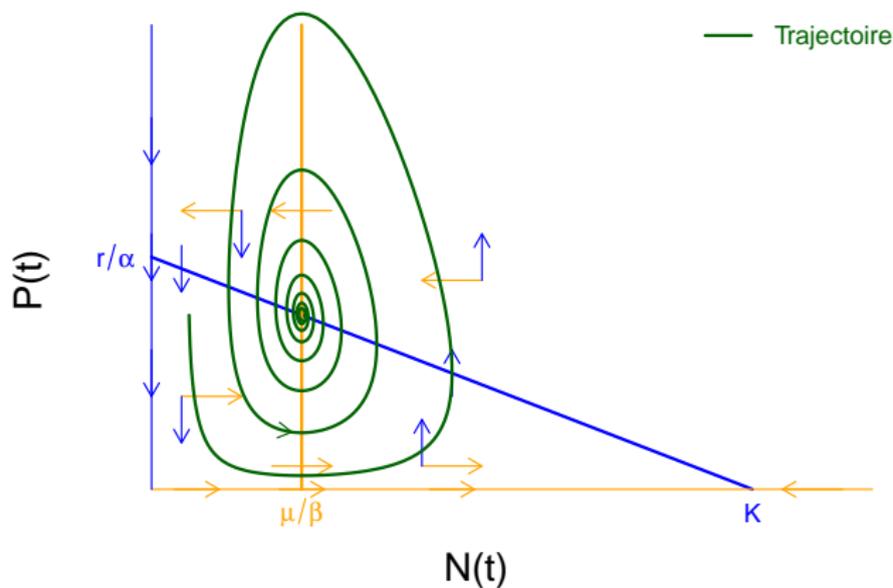
Portrait de phase

Vecteurs vitesse : on combine l'information

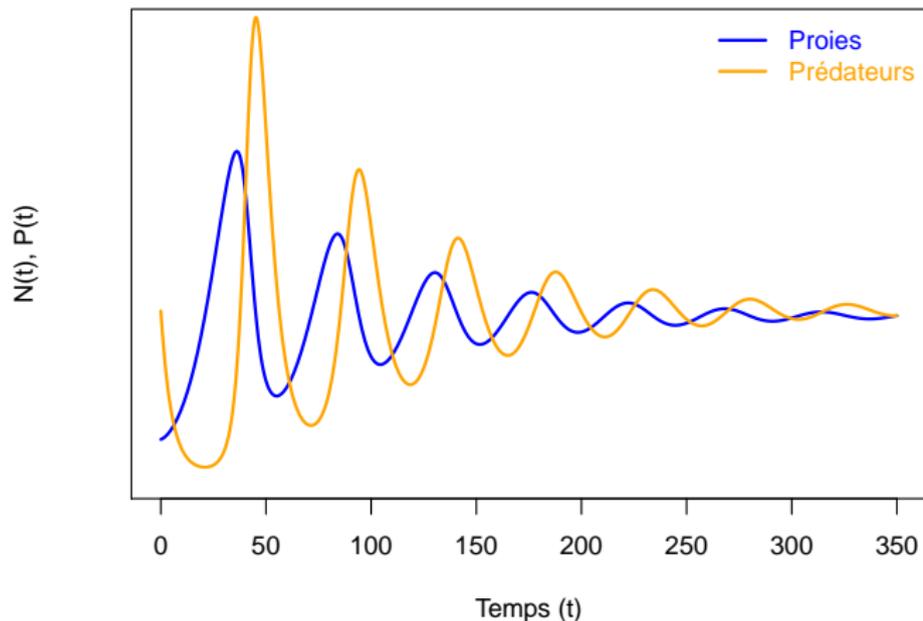


Portrait de phase

Dynamique du système



Chroniques



Plan détaillé

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les équations du modèle

Portrait de phase

Définitions

Point d'équilibre

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

avec $x(t)$ et $y(t)$ les variables.

Un point d'équilibre de ce système est un point (x^*, y^*) qui vérifie :

$$\begin{cases} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

Portrait de phase

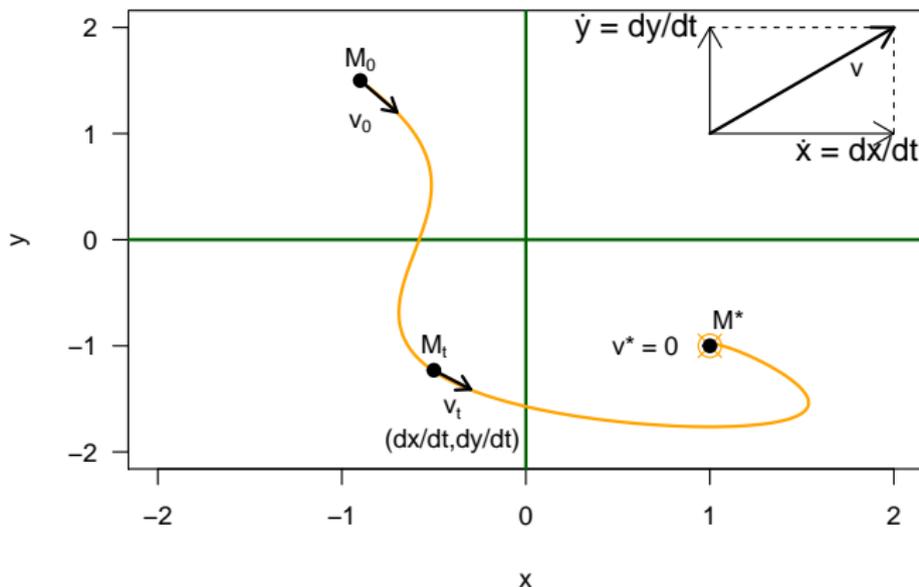
Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

- ▶ On appelle **plan de phase** le plan (x, y) ;
- ▶ La représentation des solutions $(x(t), y(t))$ lorsque t varie de 0 à $+\infty$ dans le plan de phase est le **portrait de phase** ;
- ▶ En tout point du plan de phase $(x, y) \neq (x^*, y^*)$, il ne passe qu'une seule trajectoire (système autonome) ;
- ▶ Lorsque t varie, $x(t)$ et $y(t)$ varient également, donc un point $\mathbf{M}(x(t), y(t))$ se déplace dans le plan (x, y) selon une certaine **trajectoire** définie à partir de la condition initiale $\mathbf{M}_0(x(0), y(0))$.

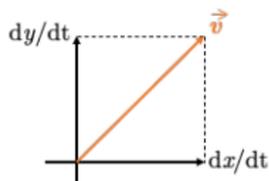
Portrait de phase

On peut définir en chaque point de la trajectoire un vecteur vitesse \vec{v} de coordonnées $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ qui est tangent à la trajectoire et orienté dans le sens de parcours de celle-ci. Les points d'équilibre sont tels que $\vec{v} = 0$.



Isoclines nulles

Soit un système dynamique tel que $\frac{dx}{dt} = f(x, y)$ et $\frac{dy}{dt} = g(x, y)$.



Les isoclines nulles de ce système sont l'ensemble des points du plan qui vérifient :

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0(\uparrow) \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0(\rightarrow)$$

Dans le plan de phase (x, y) , on parle d'**isoclines verticales** $\left(\frac{dx}{dt} = 0\right)$ ou d'**isoclines horizontales** $\left(\frac{dy}{dt} = 0\right)$, selon la direction des vecteurs vitesse le long de ces isoclines.

Table des matières

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Autres exemples

Plan détaillé

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Définitions

Équation caractéristique

Typologie des systèmes linéaires

En résumé

Système linéaire

Définition

On utilisera ici les variables $u(t)$ et $v(t)$.

Dans un système d'EDO linéaire de \mathbb{R}^2 , les fonctions f et g sont linéaires en u et v . Il s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11} u + a_{12} v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21} u + a_{22} v \end{cases}$$

Système linéaire

Écriture matricielle

Soit un système linéaire du type

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Ce système est équivalent à l'écriture matricielle $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{U}$ avec

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{v}(t) \end{pmatrix} \quad \frac{d\mathbf{U}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{du(t)}{dt} \\ \frac{dv(t)}{dt} \end{pmatrix}$$

\mathbf{M} est la "matrice Jacobienne" du système.

Dans ce cours, nous ne verrons que les cas où $\det(\mathbf{M}) \neq 0$.

Système linéaire

Point d'équilibre

Soit un système linéaire du type $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{U}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Le(s) point(s) d'équilibre vérifie(nt) :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = 0 \\ \frac{dv}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{M}\mathbf{U}^* = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{U}^* = \mathbf{0}$$

Puisque $\det(\mathbf{M}) \neq \mathbf{0}$, alors \mathbf{M} est inversible et l'équation $\mathbf{M}\mathbf{U}^* = \mathbf{0}$ admet une unique solution : $\mathbf{U}^* = \mathbf{0}$.

Le **seul** point d'équilibre est donc le point de coordonnées $(0, 0)$.

Plan détaillé

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Définitions

Équation caractéristique

Typologie des systèmes linéaires

En résumé

Équation caractéristique (1)

Soit un système linéaire du type $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{U}$ admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de \mathbf{M} sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$\det(\mathbf{M} - \lambda\mathbf{I}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0$$

Petit rappel sur les valeurs propres

- ▶ Si \mathbf{M} admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 :

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \mathbf{0}$$

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = \mathbf{0} \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = \mathbf{0}$$

On aura donc
$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{M}) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

- ▶ Si \mathbf{M} admet une valeur propre double, on aura

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{M}) = 2\lambda_0 \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_0^2 > \mathbf{0} \end{cases} .$$

- ▶ Si \mathbf{M} admet deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{ on aura } \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{M}) = 2\alpha \\ \det(\mathbf{M}) = \alpha^2 + \beta^2 > \mathbf{0} \end{cases}$$

Équation caractéristique (2)

Soit un système linéaire du type $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{U}$ admettant la matrice Jacobienne

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La nature des solutions de $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{U}$ va dépendre des valeurs propres de \mathbf{M} et donc du **signe du discriminant** de l'équation caractéristique $\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0$

$$\Delta = (\text{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4 \det(\mathbf{M})$$

On va devoir distinguer trois cas : $\Delta > 0$, $\Delta = 0$ et $\Delta < 0$.

Plan détaillé

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Définitions

Équation caractéristique

Typologie des systèmes linéaires

En résumé

Introduction

On considère le système

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{U} \quad \text{avec} \quad \mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{11} & \mathbf{a}_{12} \\ \mathbf{a}_{21} & \mathbf{a}_{22} \end{pmatrix}$$

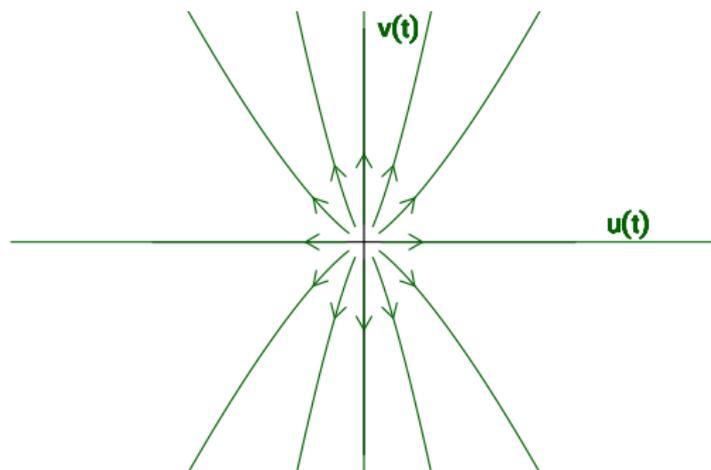
Les valeurs propres de \mathbf{M} sont les solutions de l'équation caractéristique $\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0$.

L'allure des solutions $\mathbf{U}(t)$ va dépendre de la nature des valeurs propres de \mathbf{M} donc du signe de $\Delta = \text{tr}(\mathbf{M})^2 - 4\det(\mathbf{M})$.

$\Delta > 0$: M a 2 valeurs propres réelles distinctes **positives**

$$\lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 > 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_2 t} = +\infty.$$

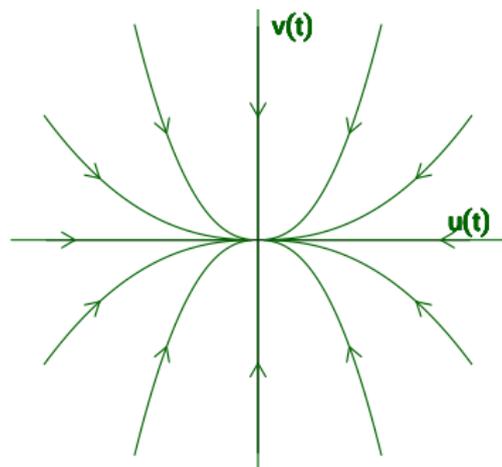
$\Rightarrow (0, 0)$ est un **noeud instable**



$\Delta > 0$: M a 2 valeurs propres réelles distinctes **négatives**

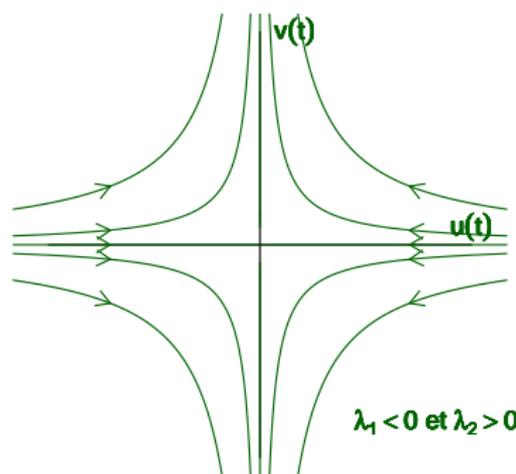
$$\lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0 : \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_1 t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\lambda_2 t} = 0.$$

$\Rightarrow (0, 0)$ est un **noeud asymptotiquement stable**



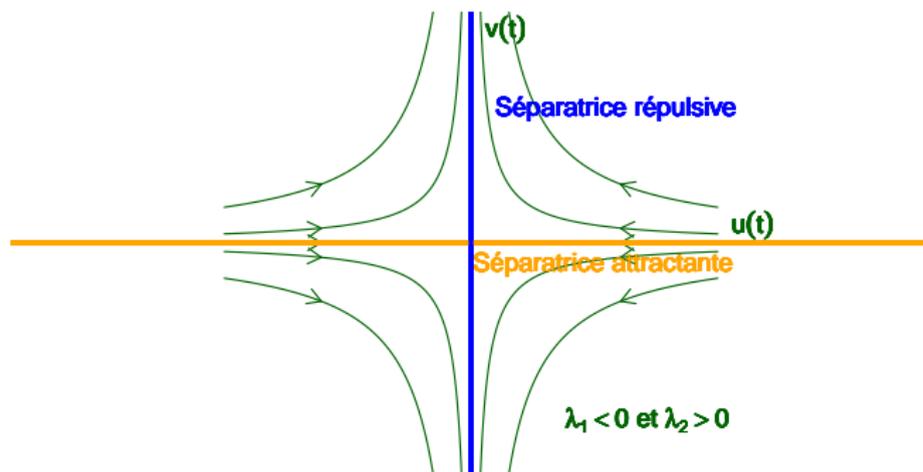
$\Delta > 0$: M a 2 valeurs propres réelles distinctes de signe opposé

$(\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 > 0)$ ou $(\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0)$
 $\Rightarrow (0, 0)$ est un **point selle**



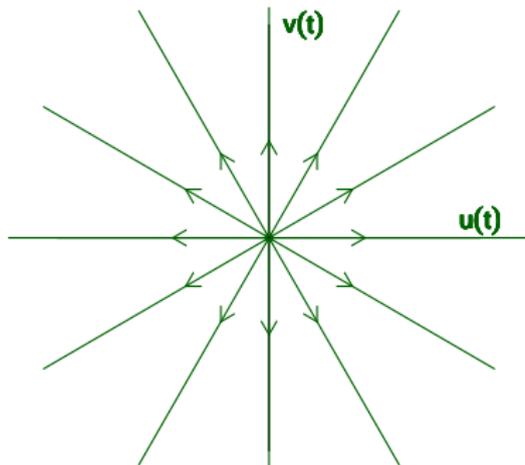
$\Delta > 0$: M a 2 valeurs propres réelles distinctes de signe opposé

$(\lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 > 0)$ ou $(\lambda_1 > 0 \text{ et } \lambda_2 < 0)$
 $\Rightarrow (0, 0)$ est un **point selle**



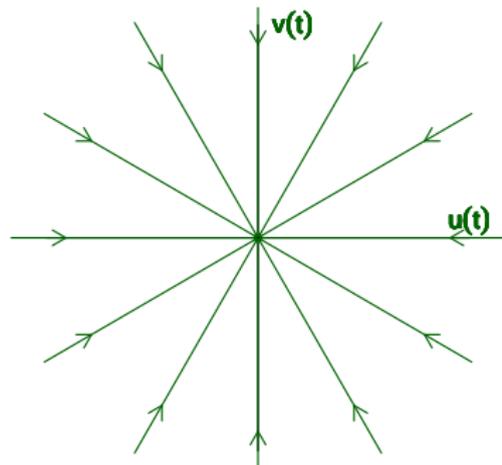
$\Delta = 0$: M a 1 valeur propre double et est **diagonale**

$\lambda_0 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ est une **étoile instable**



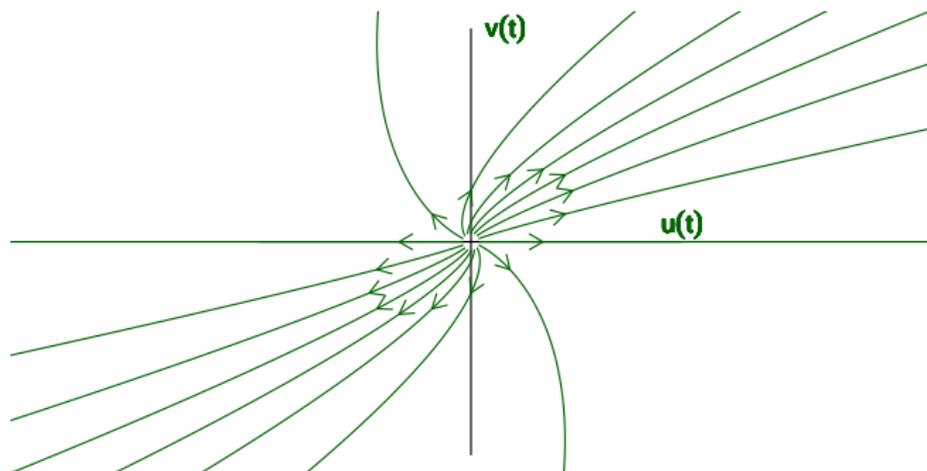
$\Delta = 0$: M a 1 valeur propre double et est **diagonale**

$\lambda_0 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ est une **étoile asymptotiquement stable**



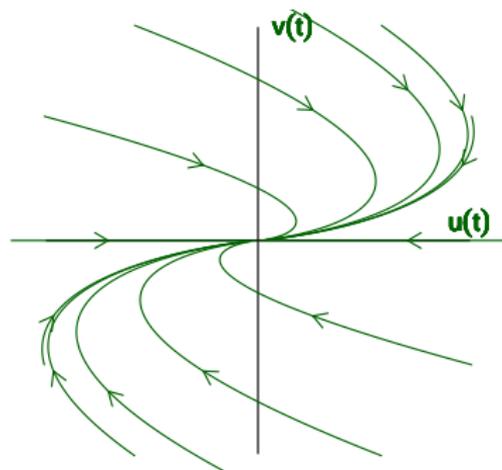
$\Delta = 0$: \mathbb{M} a 1 valeur propre double et \mathbf{n} 'est pas diagonale

$\lambda_0 > 0 \Rightarrow (0, 0)$ est un **noeud dégénéré instable**



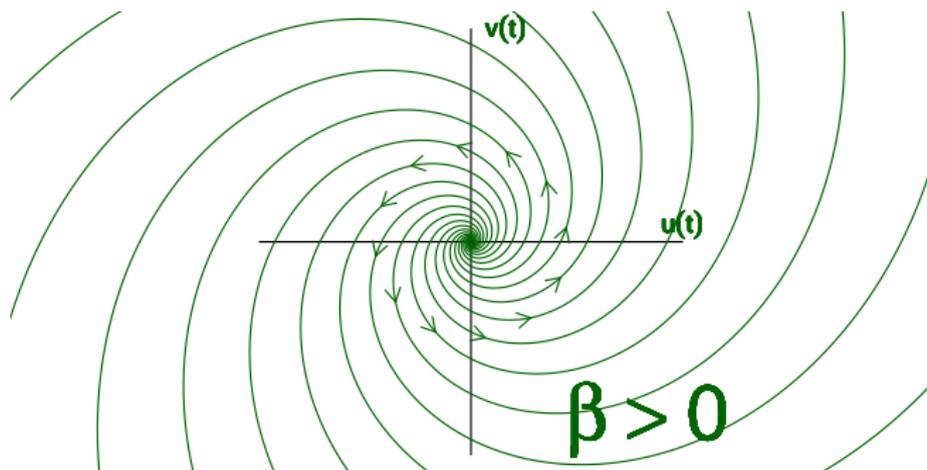
$\Delta = 0$: \mathbf{M} a 1 valeur propre double et \mathbf{n} 'est pas diagonale

$\lambda_0 < 0 \Rightarrow (0, 0)$ est un **noeud dégénéré asymptotiquement stable**



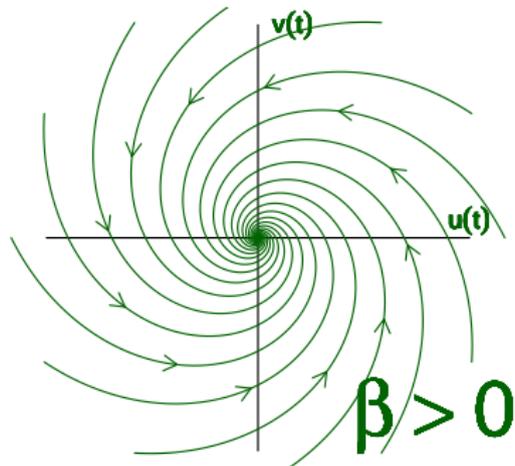
$\Delta < 0$: M a 2 valeurs propres complexes conjuguées

$\alpha > 0 \Rightarrow (0, 0)$ est un **foyer instable**



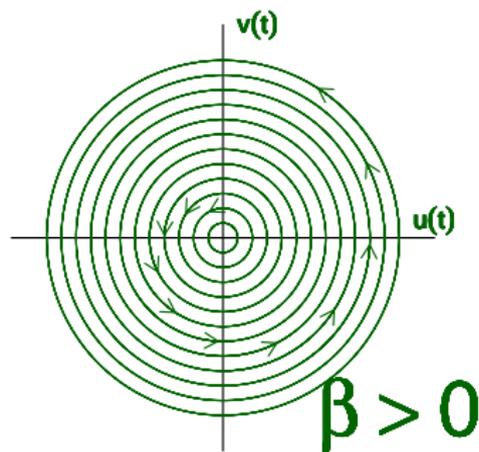
$\Delta < 0$: M a 2 valeurs propres complexes conjuguées

$\alpha < 0 \Rightarrow (0, 0)$ est un **foyer asymptotiquement stable**



$\Delta < 0$: M a 2 valeurs propres complexes conjuguées

$\alpha = 0 \Rightarrow (0, 0)$ est un **centre** (neutralement stable)



Plan détaillé

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Définitions

Équation caractéristique

Typologie des systèmes linéaires

En résumé

Typologie des systèmes linéaires : en résumé

Soit un système linéaire du type

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = a_{11}u + a_{12}v \\ \frac{dv}{dt} = a_{21}u + a_{22}v \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}\mathbf{U}$, où \mathbf{M} est la matrice Jacobienne du système définie par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Typologie des systèmes linéaires : en résumé

- ▶ La nature du point d'équilibre $(0, 0)$ dépend du nombre, du type (complexe ou réelle), et du signe de la partie réelle des valeurs propres de la matrice Jacobienne \mathbf{M} .
- ▶ Ces valeurs propres sont solutions de l'équation caractéristique de \mathbf{M} :

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0$$

- ▶ On distingue plusieurs cas selon le signe de

$$\Delta = (\text{tr}(\mathbf{M}))^2 - 4\det(\mathbf{M})$$

$$(\Delta > 0, \Delta = 0, \Delta < 0)$$

Rappels sur le lien entre $\text{tr}(\mathbf{M})$, $\det(\mathbf{M})$ et les valeurs propres

- ▶ Si \mathbf{M} admet deux valeurs propres réelles distinctes λ_1 et λ_2 :

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0 \Leftrightarrow (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$$

$$\lambda^2 - \text{tr}(\mathbf{M})\lambda + \det(\mathbf{M}) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2 = 0$$

On a donc
$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{M}) = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_1\lambda_2 \end{cases}$$

- ▶ Si \mathbf{M} admet une valeur propre double, on aura

$$\begin{cases} \text{tr}(\mathbf{M}) = 2\lambda_0 \\ \det(\mathbf{M}) = \lambda_0^2 > 0 \end{cases} .$$

- ▶ Si \mathbf{M} admet deux valeurs propres complexes conjuguées

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta, \text{ on aura } \begin{cases} \text{tr}(\mathbf{M}) = 2\alpha \\ \det(\mathbf{M}) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \end{cases}$$

Typologie des systèmes linéaires : plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$

Du fait du lien avec les valeurs propres, on peut représenter dans le plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$ les régions qui correspondent aux différents types de points d'équilibre.

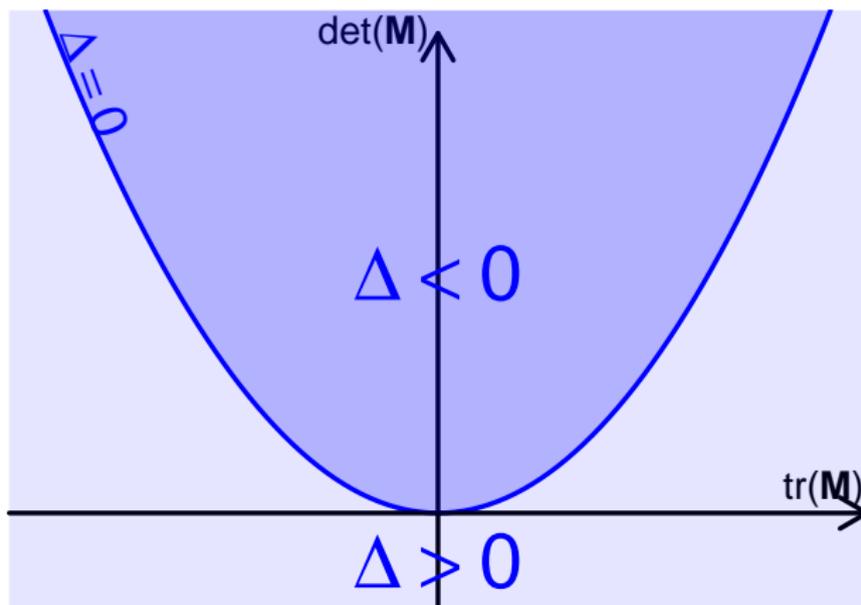
Le discriminant de l'équation caractéristique de \mathbf{M} est

$$\Delta = \text{tr}(\mathbf{M})^2 - 4\det(\mathbf{M})$$

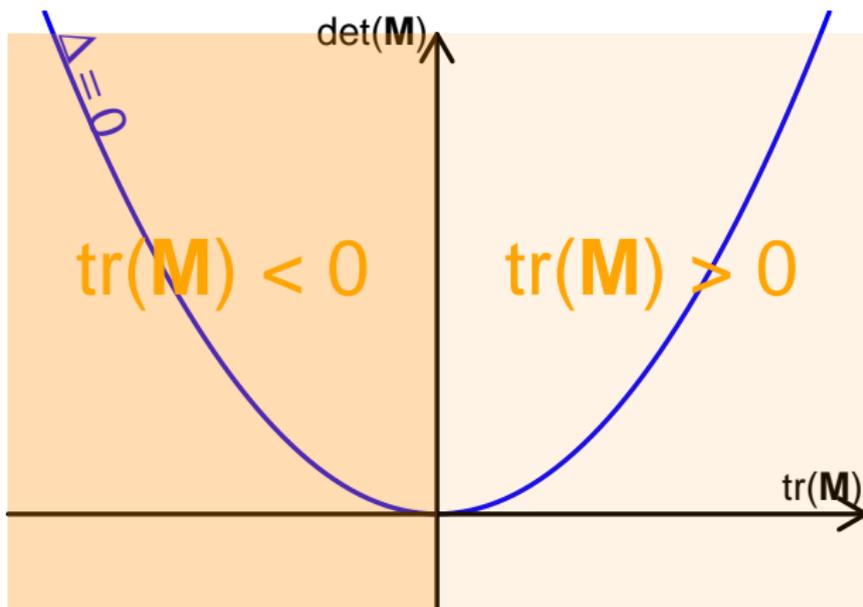
Donc la parabole d'équation $\det(\mathbf{M}) = \frac{(\text{tr}(\mathbf{M}))^2}{4}$ délimite les régions du plan où :

- ▶ $\Delta > 0$ (en-dessous la parabole) ;
- ▶ $\Delta < 0$ (au-dessus de la parabole).

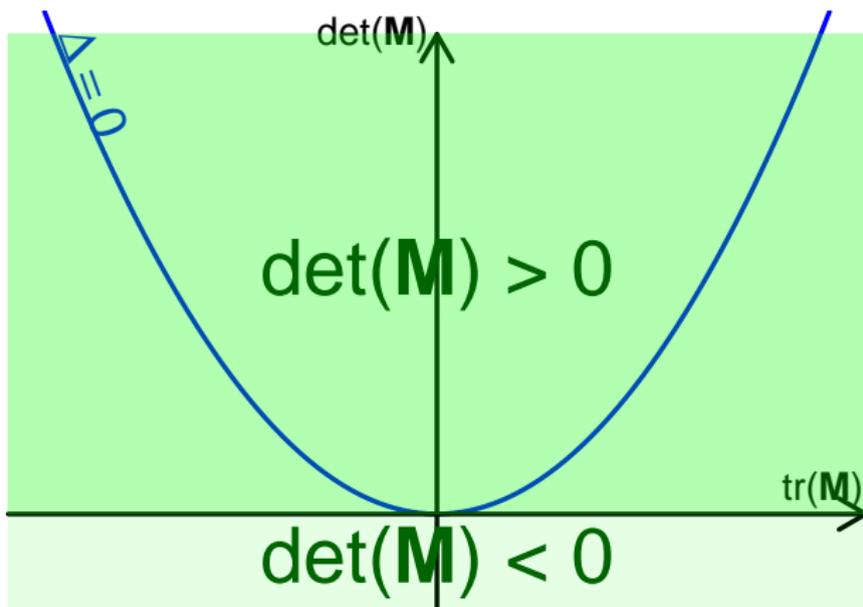
Plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$



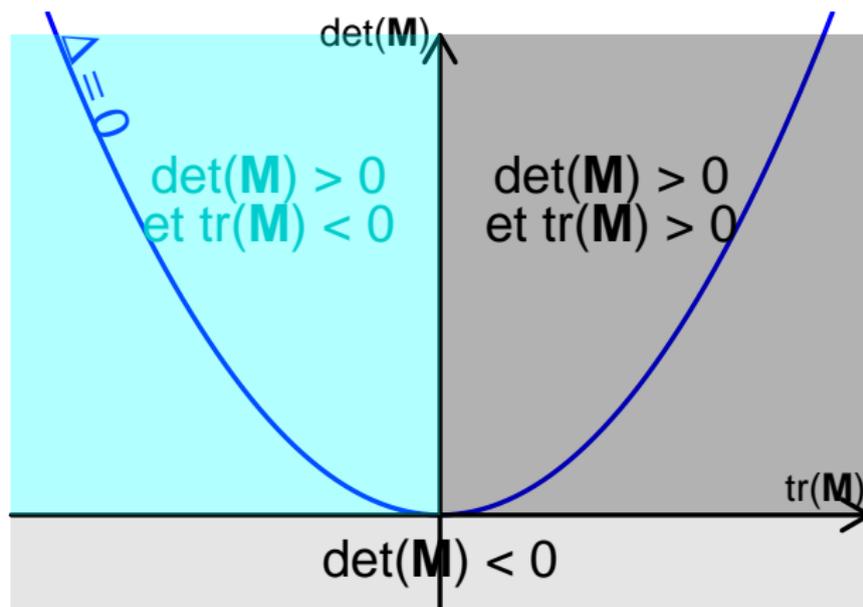
Plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$: signe de la trace



Plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$: signe du déterminant

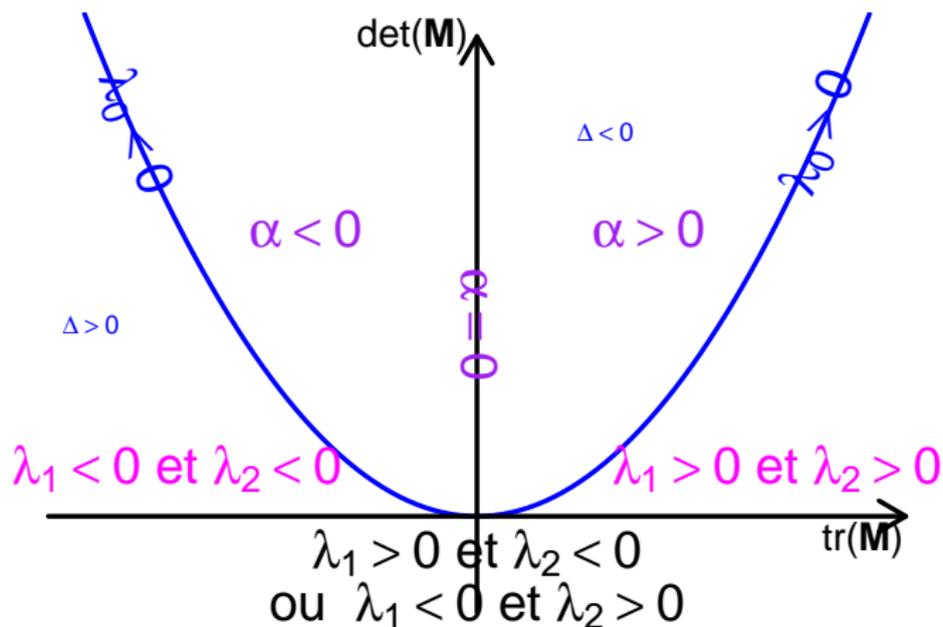


Plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$

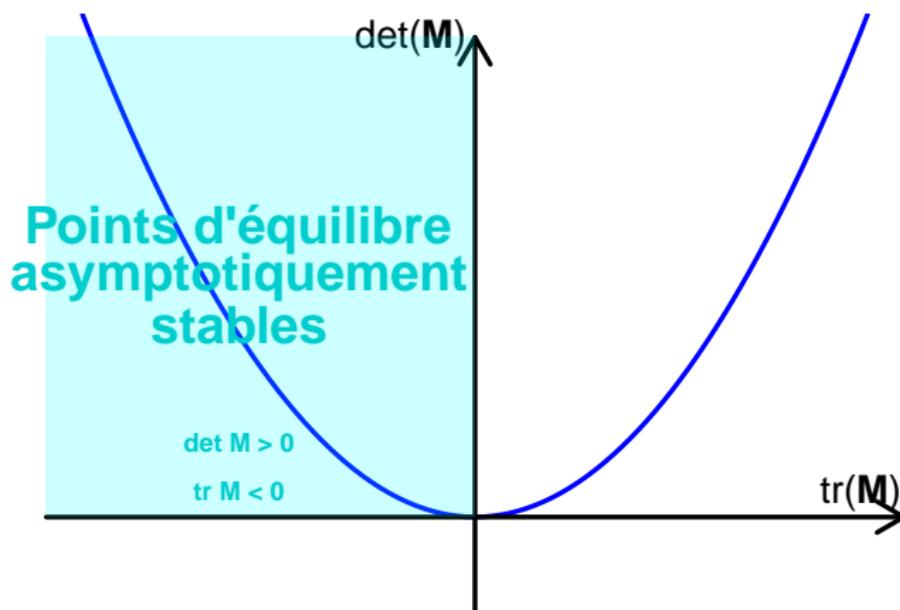


Plan ($\text{tr}(\mathbf{M})$; $\det(\mathbf{M})$)

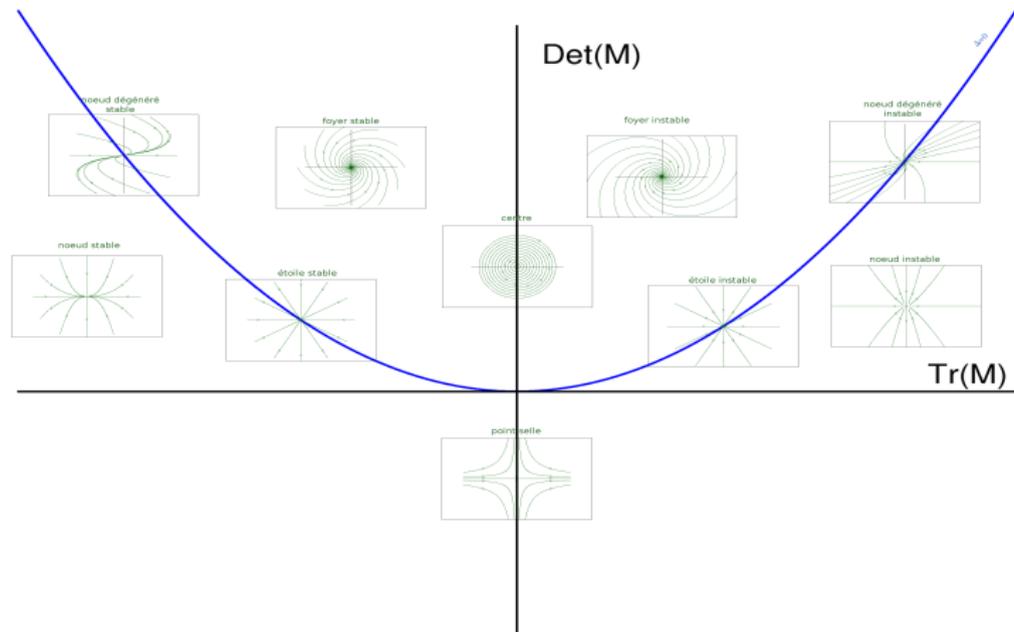
$$\begin{array}{lll} \det(\mathbf{M}) = \lambda_1 \lambda_2 & \det(\mathbf{M}) = \lambda_0^2 > 0 & \det(\mathbf{M}) = \alpha^2 + \beta^2 > 0 \\ \text{tr}(\mathbf{M}) = \lambda_1 + \lambda_2 & \text{tr}(\mathbf{M}) = 2\lambda_0 & \text{tr}(\mathbf{M}) = 2\alpha \end{array}$$



Plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$



Plan $(\text{tr}(\mathbf{M}); \det(\mathbf{M}))$



<https://lc.cx/pcbL>

Table des matières

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Autres exemples

Plan détaillé

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Retour au modèle de Lotka-Volterra

Isoclines et points d'équilibre

Stabilité des points d'équilibre

Jacobienne d'un système quelconque

Théorème de linéarisation

Le modèle de Lotka-Volterra

Rappel des équations

Le modèle de Lotka-Volterra est un modèle proies-prédateurs dont les équations sont :

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

Plan détaillé

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Retour au modèle de Lotka-Volterra

Isoclines et points d'équilibre

Stabilité des points d'équilibre

Jacobienne d'un système quelconque

Théorème de linéarisation

Isoclines nulles

Rappel

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

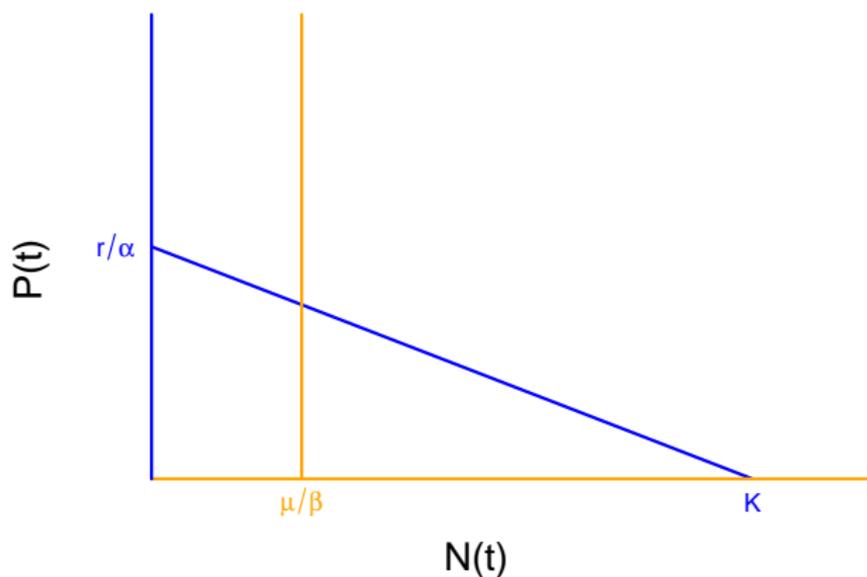
Dans le plan (x, y) , les isoclines nulles de ce système sont l'ensemble des points du plan qui vérifient :

verticales		horizontales
$\frac{dx}{dt} = f(x, y) = 0$	ou	$\frac{dy}{dt} = g(x, y) = 0$
$\vec{v} \begin{vmatrix} 0 \\ \frac{dy}{dt} \end{vmatrix}$		$\vec{v} \begin{vmatrix} \frac{dx}{dt} \\ 0 \end{vmatrix}$

Le modèle de Lotka-Volterra

Isoclines nulles dans le cas où $\mu/\beta < K$

On se place dans le plan de phase (N, P) .



Points d'équilibre

Rappel

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

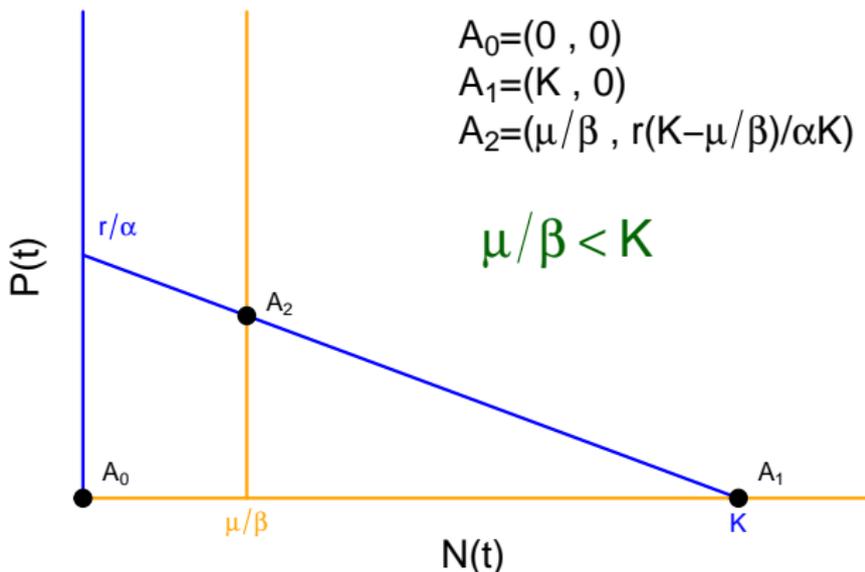
Un point d'équilibre de ce système est un point (x^*, y^*) qui vérifie :

$$\begin{cases} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = f(x^*, y^*) = 0 \\ \left. \frac{dy}{dt} \right|_{x=x^*, y=y^*} = g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

Le modèle de Lotka-Volterra

Points d'équilibre dans le cas où $\mu/\beta < K$

Les points d'équilibre sont à l'intersection des isoclines
horizontales et verticales :



Plan détaillé

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Retour au modèle de Lotka-Volterra

Isoclines et points d'équilibre

Stabilité des points d'équilibre

Jacobienne d'un système quelconque

Théorème de linéarisation

Étude de la stabilité des points d'équilibre (1)

Changement de variable

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

possédant un point d'équilibre (x^*, y^*) dont on cherche la stabilité.

Il faut se ramener à ce que l'on connaît : les systèmes linéaires

⇒ On va donc **linéariser au voisinage du point d'équilibre**.

On introduit le changement de variable suivant :

$$\begin{cases} u(t) = x(t) - x^* \\ v(t) = y(t) - y^* \end{cases}$$

Étude de la stabilité des points d'équilibre (2)

Linéarisation au voisinage du point d'équilibre

On linéarise le système au voisinage du point d'équilibre en utilisant un développement de Taylor au premier ordre des fonctions f et g :

$$u(t) = x(t) - x^* \text{ et } v(t) = y(t) - y^*$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} \simeq f(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \\ \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt} \simeq g(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} (x - x^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} (y - y^*) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{du}{dt} \simeq \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} u + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} v \\ \frac{dv}{dt} \simeq \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{(x^*, y^*)} u + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{(x^*, y^*)} v \end{cases}$$

puisque $f(x^*, y^*) = 0$ et $g(x^*, y^*) = 0$.

Étude de la stabilité des points d'équilibre (3)

Linéarisation au voisinage du point d'équilibre

Au voisinage du point d'équilibre (x^*, y^*) , le système

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

est donc équivalent au système linéaire suivant :

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}^* \mathbf{U}$$

$$\text{avec } \mathbf{M}^* = \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\star} & \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\star} \\ \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{\star} & \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{\star} \end{pmatrix}, \mathbf{U}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$$

$$u(t) = x(t) - x^* \text{ et } v(t) = y(t) - y^*$$

Plan détaillé

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Retour au modèle de Lotka-Volterra

Isoclines et points d'équilibre

Stabilité des points d'équilibre

Jacobienne d'un système quelconque

Théorème de linéarisation

Jacobienne d'un système quelconque

Soit un système dynamique d'EDO tel que

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce système est définie par

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Le modèle de Lotka-Volterra

Jacobienne (1)

Les équations du système sont

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \alpha NP = f(N, P) \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP = g(N, P) \end{cases}$$

La matrice Jacobienne de ce système est

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial N} & \frac{\partial f}{\partial P} \\ \frac{\partial g}{\partial N} & \frac{\partial g}{\partial P} \end{pmatrix}$$

Le modèle de Lotka-Volterra

Jacobienne (2)

On a

$$\begin{cases} f(N, P) = rN - \frac{rN^2}{K} - \alpha NP \\ g(N, P) = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

La matrice Jacobienne du système de Lotka-Volterra est donc :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \frac{2rN}{K} - \alpha P & -\alpha N \\ \beta P & -\mu + \beta N \end{pmatrix}$$

Plan détaillé

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Retour au modèle de Lotka-Volterra
Isoclines et points d'équilibre
Stabilité des points d'équilibre
Jacobienne d'un système quelconque
Théorème de linéarisation

Théorème de linéarisation

Soit un système non linéaire $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$ admettant un point d'équilibre (x^*, y^*) et tel que $\det(\mathbf{M}^*) \neq \mathbf{0}$, où \mathbf{M}^* est la matrice Jacobienne du système au voisinage du point (x^*, y^*) .

Alors, dans le voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$ et de sa forme linéarisée $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}^*\mathbf{U}$ ont des points d'équilibre **de même nature**, sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.

Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_0)

Cas où il existe trois points d'équilibre (cas $\mu/\beta < K$).

La matrice Jacobienne du système est :

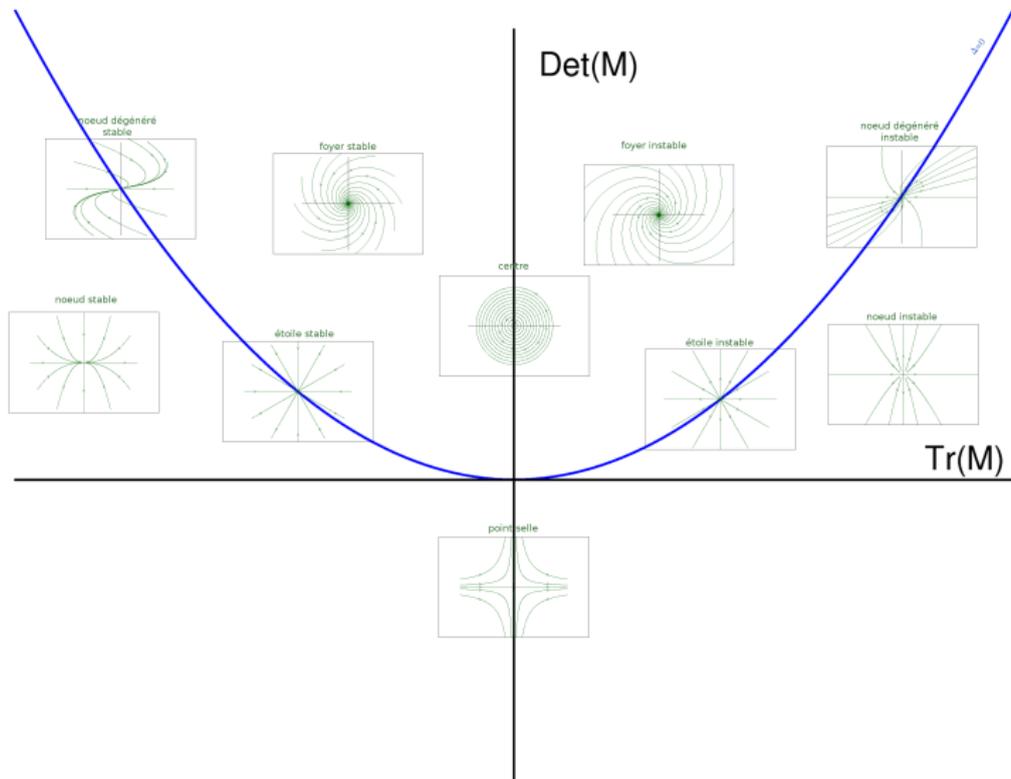
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r - \alpha P - \frac{2rN}{K} & -\alpha N \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre $\mathbf{A}_0 = (0, 0)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M}_{\mathbf{A}_0} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}$$

On a $\det(\mathbf{M}_{\mathbf{A}_0}) = -r\mu < 0$.

Donc le point d'équilibre $\mathbf{A}_0 = (0, 0)$ est un **point selle**.



Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_1) dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $A_1 = (K, 0)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$M_{A_1} = \begin{pmatrix} -r & -\alpha K \\ 0 & \beta K - \mu \end{pmatrix}$$

On a $\det(M_{A_1}) = -r(\beta K - \mu) < 0$ (car $\beta K > \mu$).

Donc le point d'équilibre $A_1 = (K, 0)$ est un **point selle**.

Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_2) dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $\mathbf{A}_2 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(K - \frac{\mu}{\beta})}{\alpha K}\right)$, les calculs se compliquent...

Il faut se rappeler que les points d'équilibre sont à l'intersection des isoclines horizontales et verticales.

Ainsi pour \mathbf{A}_2 :

$$\begin{cases} N = \frac{\mu}{\beta} \\ P = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{N}{K}\right) \end{cases}$$

On appelle ces équations **les conditions d'équilibre**.

Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_2) dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $A_2 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(K-\frac{\mu}{\beta})}{\alpha K}\right)$, la matrice Jacobienne s'écrit donc :

$$M_{A_2} = \begin{pmatrix} -r\frac{N^*}{K} & -\alpha N^* \\ \beta P^* & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\det(M_{A_2}) = \alpha\beta N^* P^* > 0$ et $\text{tr}(M_{A_2}) = -r\frac{N^*}{K} < 0$.

Donc le point d'équilibre A_2 est **un nœud, un nœud dégénéré, ou un foyer asymptotiquement stable** selon le signe de :

$$\Delta = \text{tr}(M_{A_2})^2 - 4\det(M_{A_2})$$

Le modèle de Lotka-Volterra

Portrait de phase dans le cas où $\mu/\beta < K$

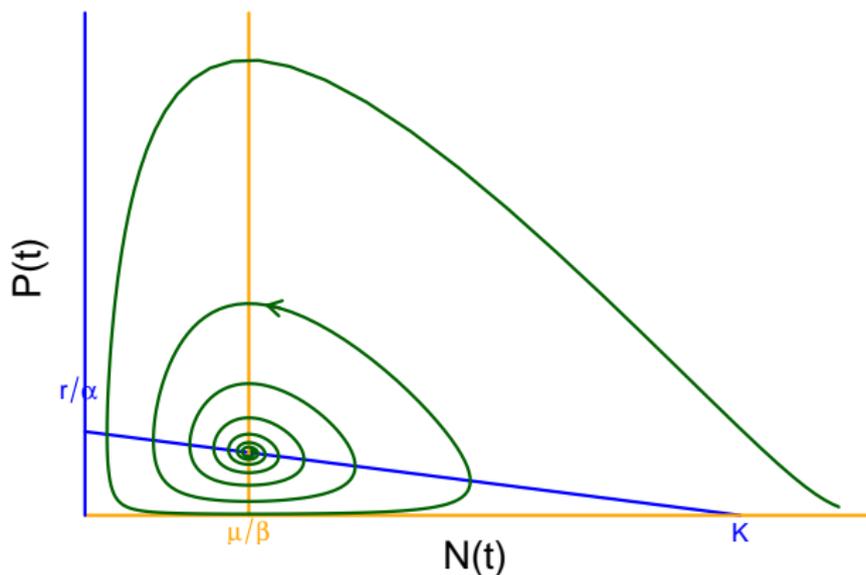


Table des matières

Introduction : le modèle proies-prédateurs de Lotka-Volterra

Les systèmes linéaires dans \mathbb{R}^2

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans \mathbb{R}^2

Autres exemples

Plan détaillé

Autres exemples

Le modèle de compétition interspécifique

Le modèle épidémiologique SIR

Le modèle de compétition interspécifique

Hypothèses du modèle

On modélise ici deux espèces en compétition. Les hypothèses sont :

- ▶ Croissance logistique pour chaque espèce en absence de compétition ;
- ▶ Chaque individu de l'espèce 2 freine la croissance de l'espèce 1 comme α individus de l'espèce 1.
- ▶ Chaque individu de l'espèce 1 freine la croissance de l'espèce 2 comme β individus de l'espèce 2.

Le modèle de compétition interspécifique

Équations du modèle

Espèce 1

$$\frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1} \right)$$

Espèce 2

$$\frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2 + \beta N_1}{K_2} \right)$$

On voit que la croissance est bien logistique en l'absence d'interaction (c'est-à-dire quand $\alpha = 0$ et $\beta = 0$).

On fait l'étude de ce système dans le plan de phase (N_1, N_2) .

Le modèle de compétition interspécifique

Isoclines nulles verticales

On résout $\frac{dN_1}{dt} = 0$

$$\begin{aligned} & \frac{dN_1}{dt} = 0 \\ \Leftrightarrow & r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & N_1 = 0 \\ \text{ou} & \frac{N_1 + \alpha N_2}{K_1} = 1 \\ \Leftrightarrow & N_1 + \alpha N_2 = K_1 \\ \Leftrightarrow & N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha} \end{aligned}$$

Il y a donc deux isoclines verticales :

- ▶ $N_1 = 0$: axe des ordonnées (axe vertical) ;
- ▶ $N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha}$: droite de pente $-\frac{1}{\alpha}$ qui passe par $(K_1, 0)$.

Le modèle de compétition interspécifique

Isoclines nulles horizontales

On peut raisonner par symétrie des équations :

$$N_1 \leftrightarrow N_2, K_1 \leftrightarrow K_2, r_1 \leftrightarrow r_2 \text{ et } \alpha \leftrightarrow \beta$$

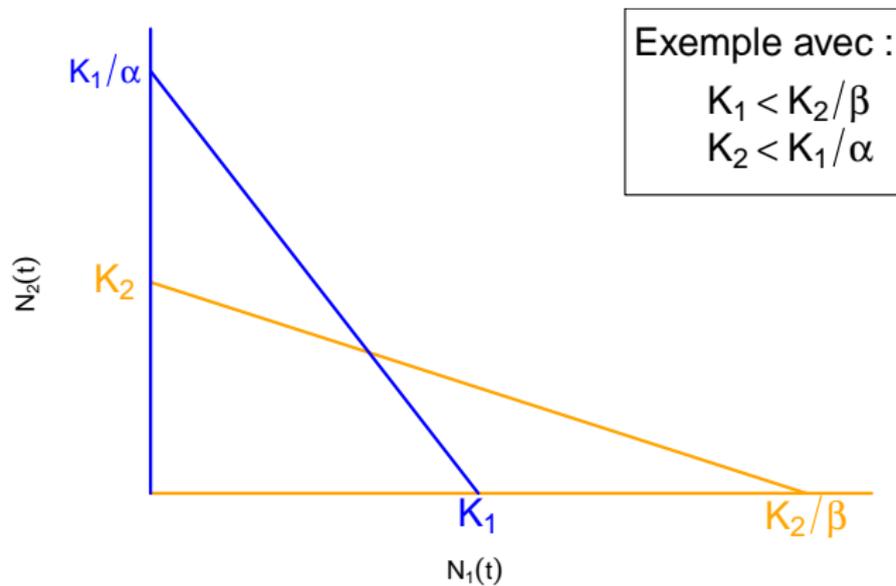
$$\begin{aligned} & \frac{dN_2}{dt} = 0 \\ \Leftrightarrow & N_2 = 0 \\ \text{ou} & N_1 = \frac{K_2 - N_2}{\beta} \\ \Leftrightarrow & N_2 = K_2 - \beta N_1 \end{aligned}$$

Il y a donc deux isoclines horizontales :

- ▶ $N_2 = 0$: axe des abscisses (axe horizontal) ;
- ▶ $N_2 = K_2 - \beta N_1$: droite de pente $-\beta$ passant par $(0, K_2)$.

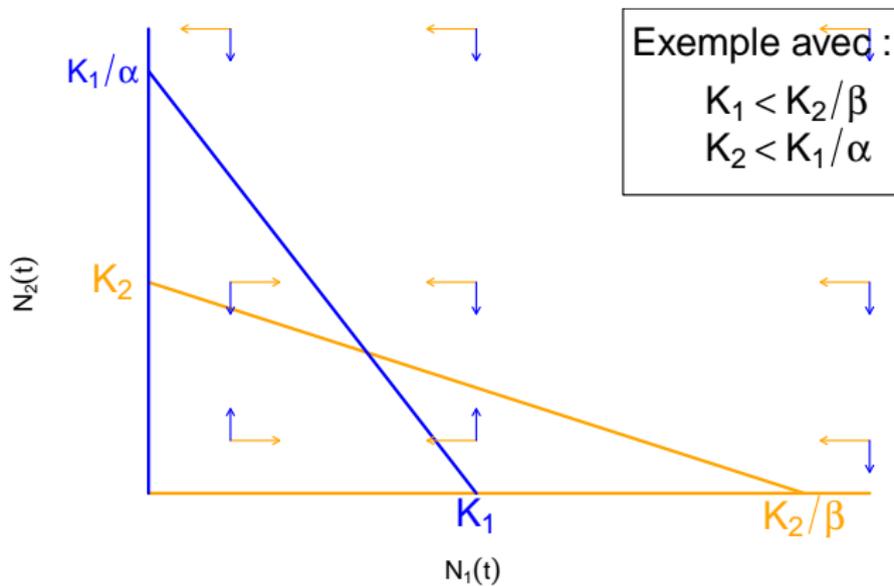
Le modèle de compétition interspécifique

Portrait de phase : isoclines



Le modèle de compétition interspécifique

Portrait de phase : vecteurs vitesse



Le modèle de compétition interspécifique

Points d'équilibre : à l'intersection des isoclines

Points d'équilibres sur l'isocline verticale $N_1 = 0$:

- ▶ $N_2 = 0$, un point d'équilibre $A_0 : (N_1^*(0) = 0; N_2^*(0) = 0)$.
- ▶ $N_2 = K_2 - \beta N_1$, un point d'équilibre $A_1 : (N_1^*(1) = 0; N_2^*(1) = K_2)$.

Points d'équilibres sur l'isocline verticale $N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha}$:

- ▶ $N_2 = 0$, un point d'équilibre $A_2 : (N_1^*(2) = K_1; N_2^*(2) = 0)$.
- ▶ $N_2 = K_2 - \beta N_1$, un point d'équilibre $A_3 : (N_1^*(3) = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*(3) = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$

Le modèle de compétition interspécifique

Points d'équilibre

Il y a donc quatre points d'équilibre :

- ▶ $A_0 : (N_1^*(0) = 0; N_2^*(0) = 0)$.
- ▶ $A_1 : (N_1^*(1) = 0; N_2^*(1) = K_2)$.
- ▶ $A_2 : (N_1^*(2) = K_1; N_2^*(2) = 0)$.
- ▶ $A_3 : (N_1^*(3) = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*(3) = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$ avec $\alpha\beta \neq 1$

Conditions d'existence du point d'équilibre A_3 :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha\beta > 0 \\ \frac{K_1}{K_2} > \alpha \\ \frac{K_2}{K_1} > \beta \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} 1 - \alpha\beta < 0 \\ \frac{K_1}{K_2} < \alpha \\ \frac{K_2}{K_1} < \beta \end{array} \right.$$

Le modèle de compétition interspécifique

Matrice Jacobienne

La matrice Jacobienne du système est :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} r_1 \left(1 - \frac{2N_1 + \alpha N_2}{K_1} \right) & -\frac{\alpha r_1}{K_1} N_1 \\ -\frac{\beta r_2}{K_2} N_2 & r_2 \left(1 - \frac{2N_2 + \beta N_1}{K_2} \right) \end{pmatrix}$$

Le modèle de compétition interspécifique

Stabilité des points d'équilibre (A_0)

Au point d'équilibre $A_0 : (N_1^*_{(0)} = 0; N_2^*_{(0)} = 0)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

A_0 est un **nœud instable**.

Le modèle de compétition interspécifique

Stabilité des points d'équilibre (A_1)

Au point d'équilibre $A_1 : (N_1^*(1) = 0; N_2^*(1) = K_2)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} r_1 \left(1 - \alpha \frac{K_2}{K_1}\right) & 0 \\ -\beta r_2 & -r_2 \end{pmatrix}$$

- ▶ Si $\frac{K_1}{K_2} < \alpha$, alors $\det(\mathbf{M}_1) > \mathbf{0}$ et $\text{tr}(\mathbf{M}_1) < \mathbf{0}$, A_1 est un noeud asymptotiquement stable.
- ▶ Si $\frac{K_1}{K_2} > \alpha$, alors $\det(\mathbf{M}_1) < \mathbf{0}$, A_1 est point selle.

Le modèle de compétition interspécifique

Stabilité des points d'équilibre (A_2)

Au point d'équilibre $A_2 : (N_1^*_{(2)} = K_1; N_2^*_{(2)} = 0)$, on raisonne par symétrie :

$$\mathbf{M}_2 = \begin{pmatrix} -r_1 & -\alpha r_1 \\ 0 & r_2 \left(1 - \beta \frac{K_1}{K_2}\right) \end{pmatrix}$$

- ▶ Si $\frac{K_2}{K_1} < \beta$, alors $\det(\mathbf{M}_2) > 0$ et $\text{tr}(\mathbf{M}_2) < 0$, A_2 est un noeud asymptotiquement stable.
- ▶ Si $\frac{K_2}{K_1} > \beta$, alors $\det(\mathbf{M}_2) < 0$, A_2 est un point selle.

Le modèle de compétition interspécifique

Stabilité des points d'équilibre (A_3)

Au point d'équilibre $A_3 : (N_1^*(3) = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*(3) = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} r_1 \left(1 - \frac{2N_1^*(3) + \alpha N_2^*(3)}{K_1} \right) & -\frac{\alpha r_1 N_1^*(3)}{K_1} \\ -\frac{\beta r_2 N_2^*(3)}{K_2} & r_2 \left(1 - \frac{2N_2^*(3) + \beta N_1^*(3)}{K_2} \right) \end{pmatrix}$$

Au point d'équilibre A_3 , on a par ailleurs

$$N_2 = \frac{K_1 - N_1}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha N_2 = K_1 - N_1$$

$$\text{et } N_2 = \frac{K_2 - \beta N_1}{\beta} \Leftrightarrow \beta N_1 = K_2 - N_2.$$

Le modèle de compétition interspécifique

Stabilité des points d'équilibre (A_3)

Au point d'équilibre A_3 : $(N_1^*(3) = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta}; N_2^*(3) = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta})$,
après simplification, on obtient finalement :

$$M_3 = \begin{pmatrix} -\frac{r_1 N_1^*(3)}{K_1} & -\frac{\alpha r_1 N_1^*(3)}{K_1} \\ -\frac{\beta r_2 N_2^*(3)}{K_2} & -\frac{r_2 N_2^*(3)}{K_2} \end{pmatrix}$$

Le modèle de compétition interspécifique

Stabilité des points d'équilibre (A_3)

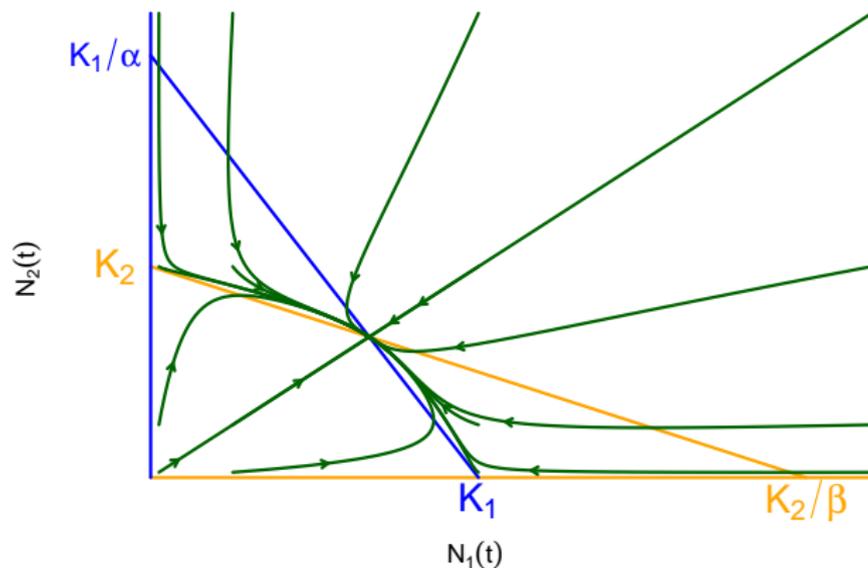
$$\det(\mathbf{M}_3) = (1 - \alpha\beta) \frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{N}_1^*(3) \mathbf{N}_2^*(3)}{\mathbf{K}_1 \mathbf{K}_2} \text{ est du signe de } (1 - \alpha\beta).$$

$$\text{tr}(\mathbf{M}_3) = -\frac{\mathbf{r}_1 \mathbf{N}_1^*(3)}{\mathbf{K}_1} - \frac{\mathbf{r}_2 \mathbf{N}_2^*(3)}{\mathbf{K}_2} < 0$$

- ▶ Si $1 - \alpha\beta < 0$, alors A_3 est un point selle.
- ▶ Si $1 - \alpha\beta > 0$, alors A_3 est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

Le modèle de compétition interspécifique

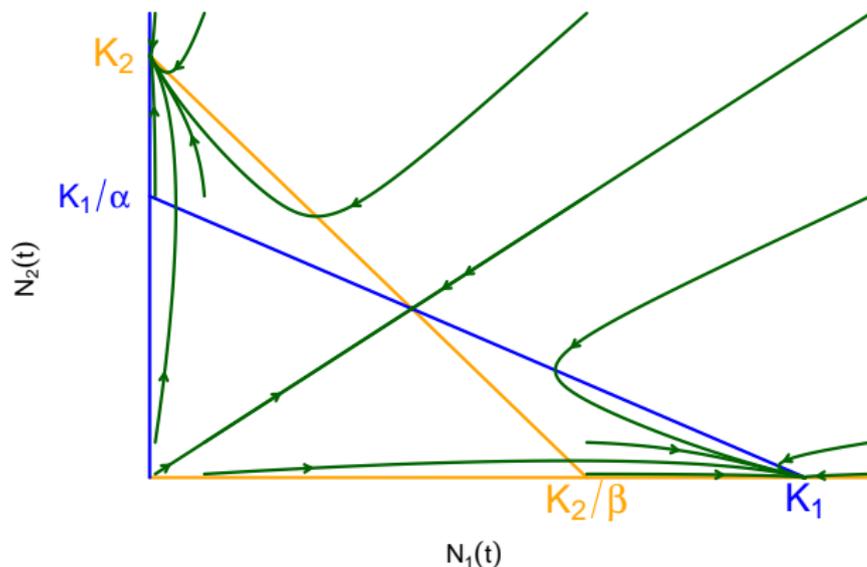
Portrait de phase : cas où A_3 existe et $1 - \alpha\beta > 0$



Il y a **coexistence** des deux espèces.

Le modèle de compétition interspécifique

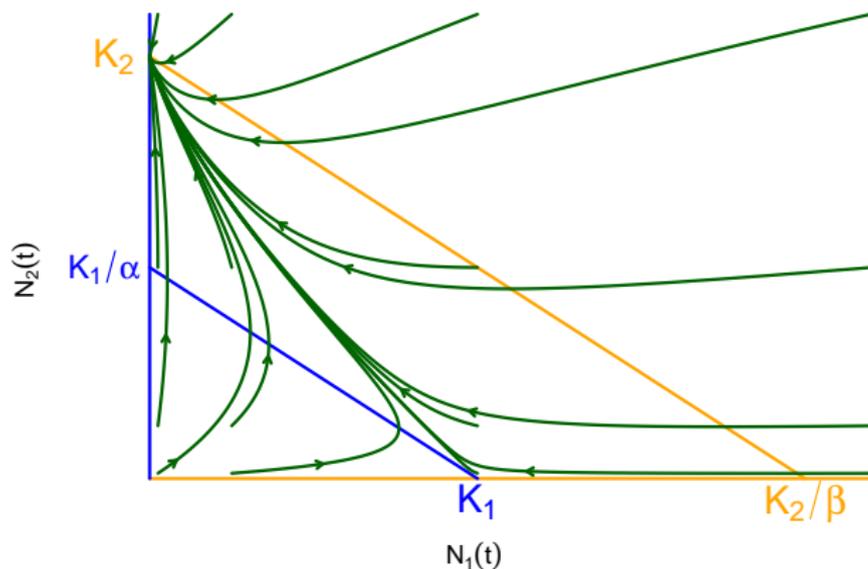
Portrait de phase : cas où A_3 existe et $1 - \alpha\beta < 0$



Il y a **exclusion mutuelle**.

Le modèle de compétition interspécifique

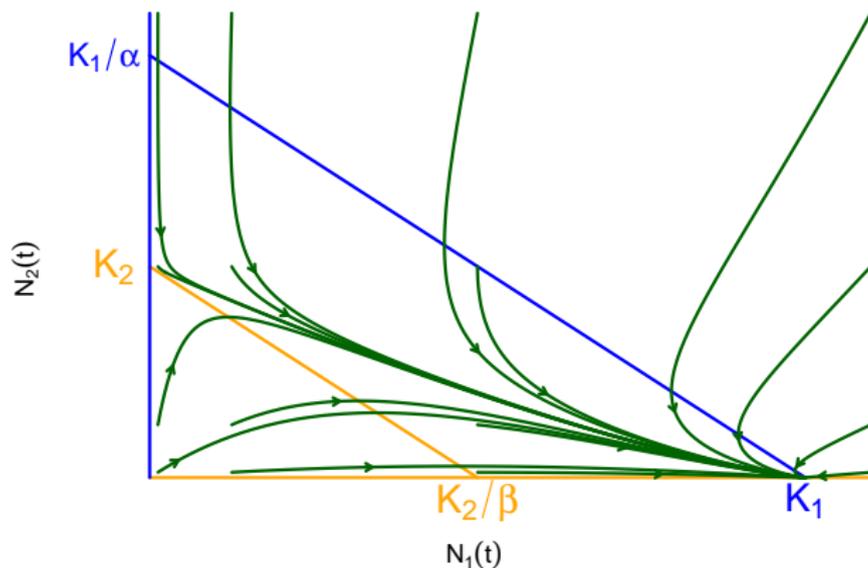
Portrait de phase : cas où A_3 n'existe pas et $K_2 > K_1/\alpha$



L'espèce 2 exclut l'espèce 1.

Le modèle de compétition interspécifique

Portrait de phase : cas où A_3 n'existe pas et $K_1 > K_2/\beta$



L'espèce 1 exclut l'espèce 2.

Plan détaillé

Autres exemples

Le modèle de compétition interspécifique

Le modèle épidémiologique SIR

Le modèle épidémiologique SIR

Présentation du modèle

Ce modèle distingue trois classes d'individus selon leur sensibilité vis-à-vis d'une maladie contagieuse.

- ▶ Les individus S sont sains et peuvent être contaminés ;
- ▶ Les individus infectés I peuvent contaminer les individus sains ; le taux de contamination est β ; les individus infectés guérissent de la maladie avec un taux ν .
- ▶ Les individus immunisés R ont été infectés et sont immunisés quelques temps contre la maladie. Ils redeviennent ensuite sains avec un taux γ .

Le modèle épidémiologique SIR

Équations du modèle

Les équations du modèle sont

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta IS + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R \end{array} \right.$$

De plus, $N = S + I + R = N_0$ avec $N_0 = \text{constante}$

$$\text{car } \frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = 0$$

Le modèle épidémiologique SIR

Interprétation biologique

- ▶ βIS est le terme d'interaction entre les individus sains et les individus infectés. C'est la quantité d'individus sains devenant infectés par unité de temps dt .
- ▶ νI est la quantité d'individus infectés qui guérissent par unité de temps dt .
- ▶ γR est la quantité d'individus immunisés qui perdent leur immunité par unité de temps dt .

Le modèle épidémiologique SIR

Points d'équilibre

Si on note $N = S + I + R$, on a

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} = \beta IS - \beta IS + \gamma R - \gamma R + \nu I - \nu I = 0$$

$$\frac{dN}{dt} = 0 \Leftrightarrow N = N_0$$

On peut donc réduire ce système à un système à deux dimensions S et I

On aura à tout instant $R = N_0 - S - I$.

Le modèle épidémiologique SIR

Écriture en dimension 2

En utilisant la relation $N_0 = S + I + R$, il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\beta IS + \gamma R \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \\ \frac{dR}{dt} = \nu I - \gamma R \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = \gamma(N_0 - S - I) - \beta IS \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \end{array} \right.$$

Le modèle épidémiologique SIR

Points d'équilibre

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma(N_0 - S - I) = \beta IS \\ \nu I = \beta IS \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} S = N_0 - \left(1 + \frac{\gamma}{\nu}\right) I \\ I^* = 0 \quad \text{ou} \quad S^* = \frac{\nu}{\beta} < N_0 \end{cases}$$

$$I^* = 0 \Rightarrow S^* = N_0 \quad \text{et} \quad S^* = \frac{\nu}{\beta} \Rightarrow I^* = \dots$$

Le modèle épidémiologique SIR

Points d'équilibre

- ▶ $I_0^* = 0 \Rightarrow S_0^* = N_0$: tous les individus sont sains.
- ▶ Si $S_1^* = \frac{\nu}{\beta}$, alors

$$I_1^* = \frac{\gamma(N_0 - S_1^*)}{\gamma + \nu} = \frac{\gamma(N_0 - \frac{\nu}{\beta})}{\gamma + \nu}$$

$$\Rightarrow I_1^* = \frac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)} > 0$$

Ce point n'existe que si $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$

Le modèle épidémiologique SIR

Isoclines nulles

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{verticales} \\ \text{horizontales} \end{array} \right. \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = 0 \\ \frac{dI}{dt} = 0 \end{array} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma(N_0 - S - I) - \beta IS = 0 \\ I(\beta S - \nu) = 0 \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} I = \frac{\gamma(N_0 - S)}{\gamma + \beta S} = h(S) \\ I = 0 \quad \text{ou} \quad S = \frac{\nu}{\beta} \end{array} \right.$$

Dans le plan (S, I) , l'isocline nulle verticale est une **hyperbole** d'équation $h(S)$.

Les isoclines nulles horizontales sont l'**axe horizontal** et la **droite verticale** $S = \frac{\nu}{\beta}$.

Le modèle épidémiologique SIR

Matrice Jacobienne du système

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \gamma(N_0 - S - I) - \beta IS \\ \frac{dI}{dt} = \beta IS - \nu I \end{cases} \Rightarrow \mathbf{M} = \begin{pmatrix} -\gamma - \beta I & -\gamma - \beta S \\ \beta I & \beta S - \nu \end{pmatrix}$$

Le modèle épidémiologique SIR

Stabilité des points d'équilibre

Au point $(S_0^* = N_0; I_0^* = 0)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M}_0 = \begin{pmatrix} -\gamma & -\gamma - \beta N_0 \\ 0 & \beta N_0 - \nu \end{pmatrix}$$

$\text{tr}(\mathbf{M}_0) = -\gamma + \beta N_0 - \nu$ et $\det(\mathbf{M}_0) = -\gamma(\beta N_0 - \nu)$

$$N_0 > \frac{\nu}{\beta}$$

$$\det(\mathbf{M}_0) < 0$$

$\Rightarrow (S_0^*; I_0^*)$ est un **point selle**.

$$N_0 < \frac{\nu}{\beta}$$

$$\det(\mathbf{M}_0) > 0 \text{ et } \text{tr}(\mathbf{M}_0) < 0$$

$$\Delta = (-\gamma - \beta N_0 + \nu)^2 > 0$$

$\Rightarrow (S_0^*; I_0^*)$ est un **nœud**

asymptotiquement stable.

Le modèle épidémiologique SIR

Stabilité des points d'équilibre

Au point $\left(S_1^* = \frac{\nu}{\beta}; I_1^* = \frac{\gamma(\beta N_0 - \nu)}{\beta(\gamma + \nu)} \right)$, la Jacobienne s'écrit :

$$\mathbf{M}_1 = \begin{pmatrix} -\gamma - \beta I_1^* & -\gamma - \beta S_1^* \\ \beta I_1^* & 0 \end{pmatrix}$$

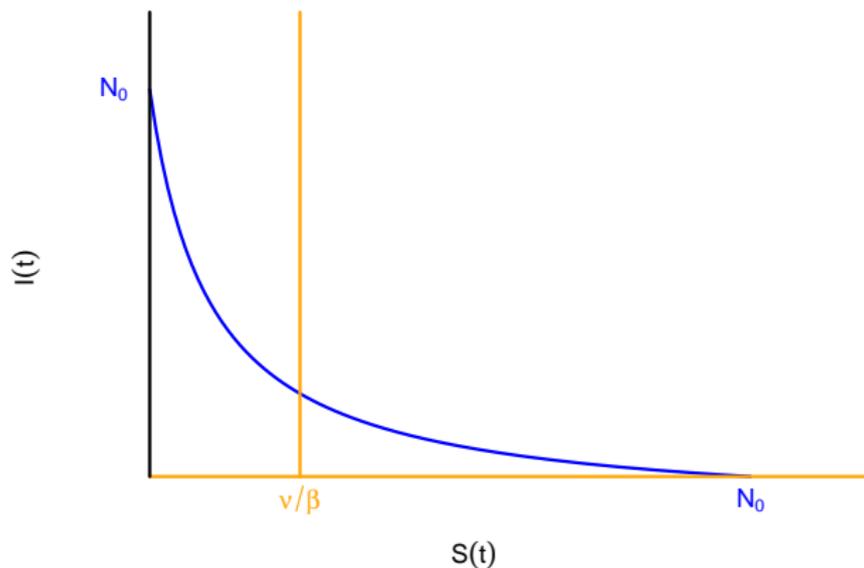
Ici, on a nécessairement $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$.

$$\begin{cases} \operatorname{tr}(\mathbf{M}_1) = -\gamma - \beta S_1^* < 0 \\ \det(\mathbf{M}_1) = \beta I_1^* (\gamma + \beta S_1^*) > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (S_1^*; I_1^*)$ est **asymptotiquement stable**.

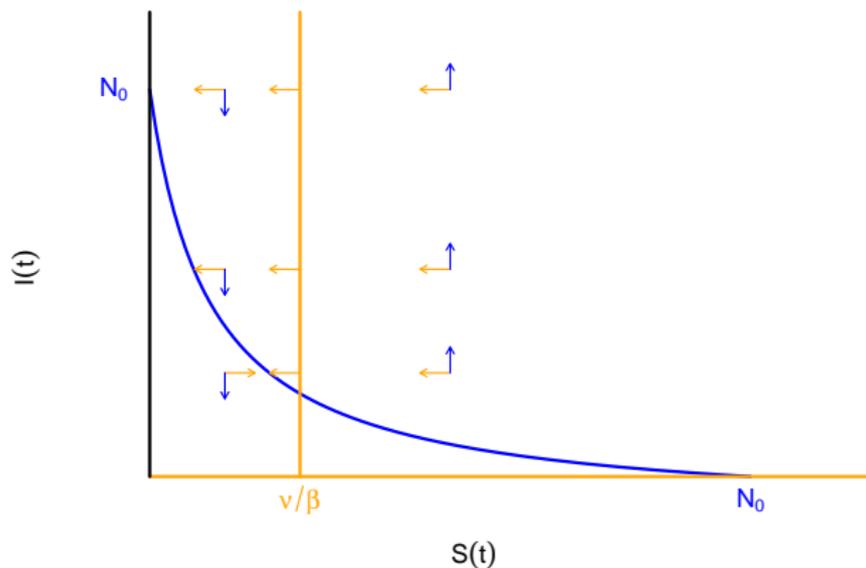
Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase, $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, isoclines



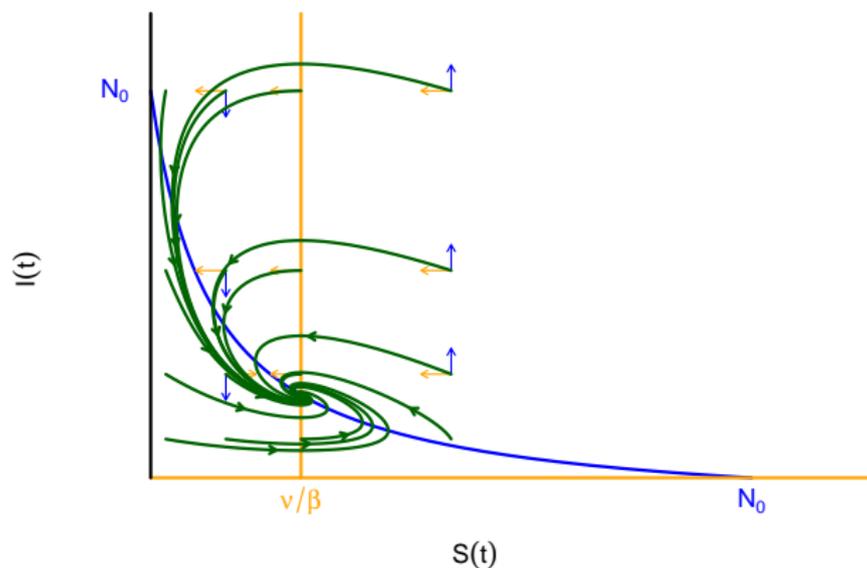
Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase, $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, vecteurs vitesse



Le modèle épidémiologique SIR

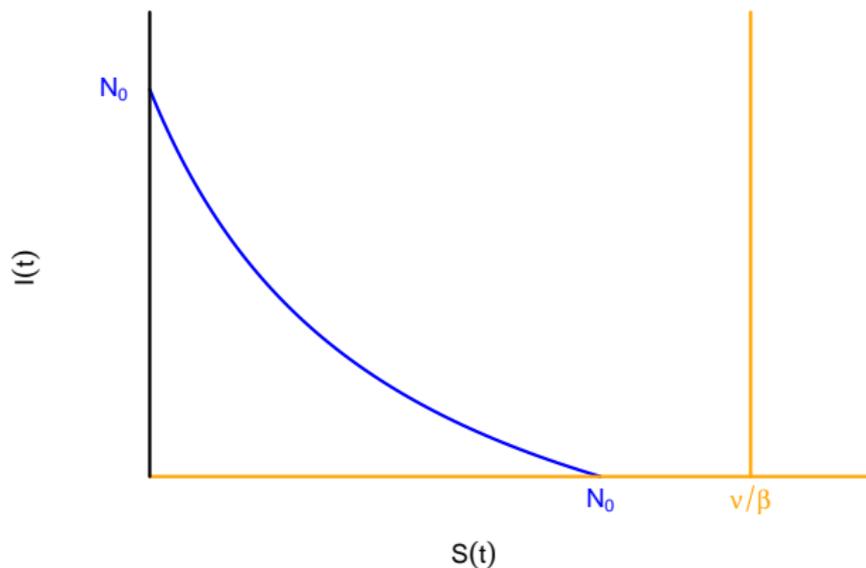
Portrait de phase, $N_0 > \frac{\nu}{\beta}$, trajectoires



À l'équilibre $I_1^* > 0$, $S_1^* = \frac{\nu}{\beta}$.

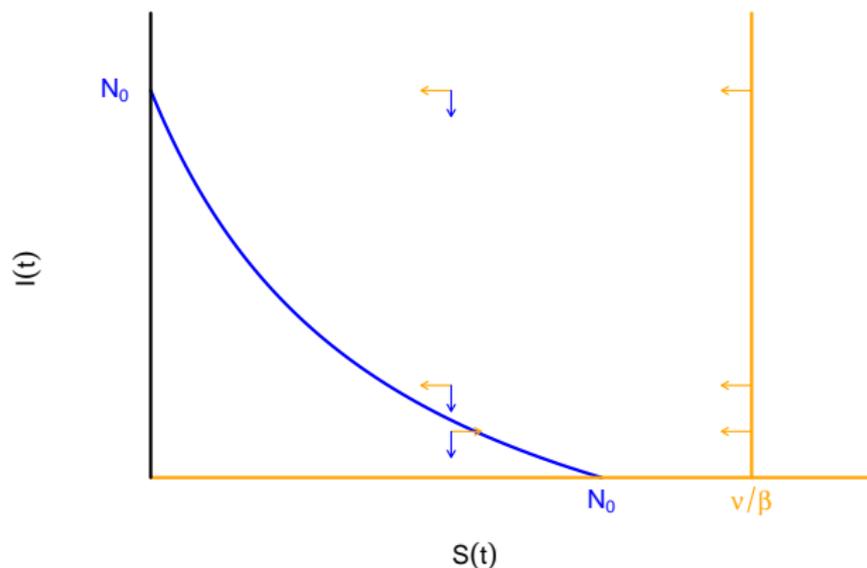
Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase, $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, isoclines



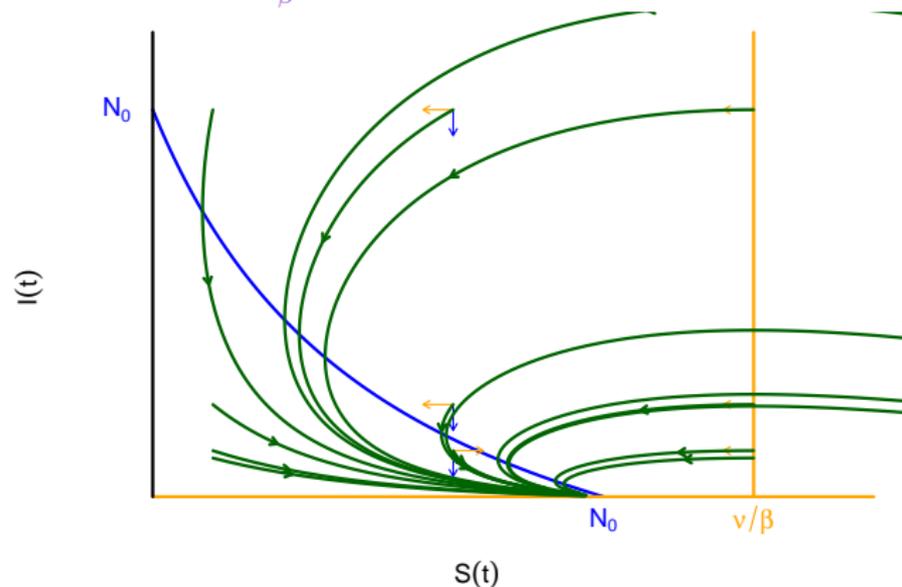
Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase, $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, vecteurs vitesse



Le modèle épidémiologique SIR

Portrait de phase, $N_0 < \frac{\nu}{\beta}$, trajectoires



L'infection ne se maintient pas dans la population.