1 Intégrales premières

Énoncé

Soient les deux équations différentielles ordinaires suivantes décrivant les variations de concentrations chimiques M(t) (m-RNA) et E(t) (enzyme) :

$$\begin{cases} \dot{M} = \frac{1}{1+E} - \alpha \\ \dot{E} = M - \beta \end{cases}$$

1. Rechercher les points d'équilibre. Étudier la stabilité locale.
2. Dessiner les isoclines (sens des flèches).
3. Rechercher s'il existe une intégrale première. La calculer si elle existe. Conclure quant à l'existence de centres.
4. Dessiner le portrait de phase.

Correction

1. **Points d'équilibres et stabilité**

$$\begin{cases} \frac{1}{1+E} - \alpha = 0 \\ M - \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} M = \beta \\ E = \frac{1-\alpha}{\alpha} \end{cases}$$

Ce système comporte un seul point d'équilibre : $\left(\beta, \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)$.

Pour étudier leur stabilité, on linéarise au voisinage du point déquilibre. La matrice jacobienne du système est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(1+E)^2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

d'où la jacobienne au point d'équilibre :

$$J^* = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{on a donc :} \quad \begin{cases} \mathrm{Tr}(J^*) = 0 \\ \mathrm{Det}(J^*) = \alpha^2 > 0 \end{cases}$$

La linéarisation prévoit des centres. C'est un point d'équilibre non hyperbolique. On ne peut donc pas conclure sur le portrait de phase du système non linéaire au voisinage de ce point.

2. **Isoclines**

   - isoclines verticales ($\dot{M} = 0$) : courbe d'équation $E = \frac{1-\alpha}{\alpha}$. Orientation des vecteurs vitesse sur l'isocline : $\dot{E} = M - \beta > 0$ si $M > \beta$.

- isoclines horizontales ($\dot{E} = 0$) : courbe d'équation $M = \beta$. Orientation des vecteurs vitesse sur l'isocline : $\dot{M} = \frac{1}{1+E} - \alpha > 0$ si $E < \frac{1-\alpha}{\alpha}$.

3. **Intégrale première et conservation des centres**

   Pour vérifier si les centres autour du point $\left(\beta, \dfrac{1-\alpha}{\alpha}\right)$ sont conservés on utilise une intégrale première, si elle existe. On cherche la fonction $H(M,E)$ qui vérifie $\dot{H}(M,E) = 0$ le long des trajectoires solutions.

   H est donnée par : $\dfrac{dM}{dE} = \dfrac{\frac{1}{1+E} - \alpha}{M - \beta}$ donc $(M-\beta)\, dM = \left(\dfrac{1}{1+E} - \alpha\right) dE$

   En intégrant on obtient : $\dfrac{M^2}{2} - \beta M = \ln|1+E| - \alpha E + K$. On pose donc il existe une intégrale première $H(M,E)$ telle que :

   $$H(M,E) = \frac{M^2}{2} - \beta M - \ln|1+E| + \alpha E$$

   Pour vérifier que les centres sont préservés, il faut montrer que H admet un extremum local au point d'équilibre. On utilise un développement de Taylor à l'ordre 2 :

   - $\dfrac{\partial H}{\partial M} = M - \beta$ d'où $\left.\dfrac{\partial H}{\partial M}\right|_* = 0$
   - $\dfrac{\partial H}{\partial E} = \alpha - \dfrac{1}{1+E}$ d'où $\left.\dfrac{\partial H}{\partial E}\right|_* = 0$
   - $\dfrac{\partial^2 H}{\partial M^2} = 1$ d'où $\left.\dfrac{\partial^2 H}{\partial M^2}\right|_* = 1$
   - $\dfrac{\partial^2 H}{\partial E^2} = \dfrac{1}{(1+E)^2}$ d'où $\left.\dfrac{\partial^2 H}{\partial E^2}\right|_* = \alpha^2$
   - $\dfrac{\partial^2 H}{\partial M \partial E} = 0$ d'où $\left.\dfrac{\partial^2 H}{\partial M \partial E}\right|_* = 0$

   On obtient ainsi, pour tout point au voisinage du point d'équilibre:

   $$H(M,E) - H\left(\beta, \frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}(M-\beta)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\left(E - \frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^2 > 0$$

   Donc le point d'équilibre est un minimum local pour la fonction H. Donc les courbes de niveau de H se referment. Donc les centres sont préservés au voisinage du point d'équilibre.

4. **Portrait de phase**

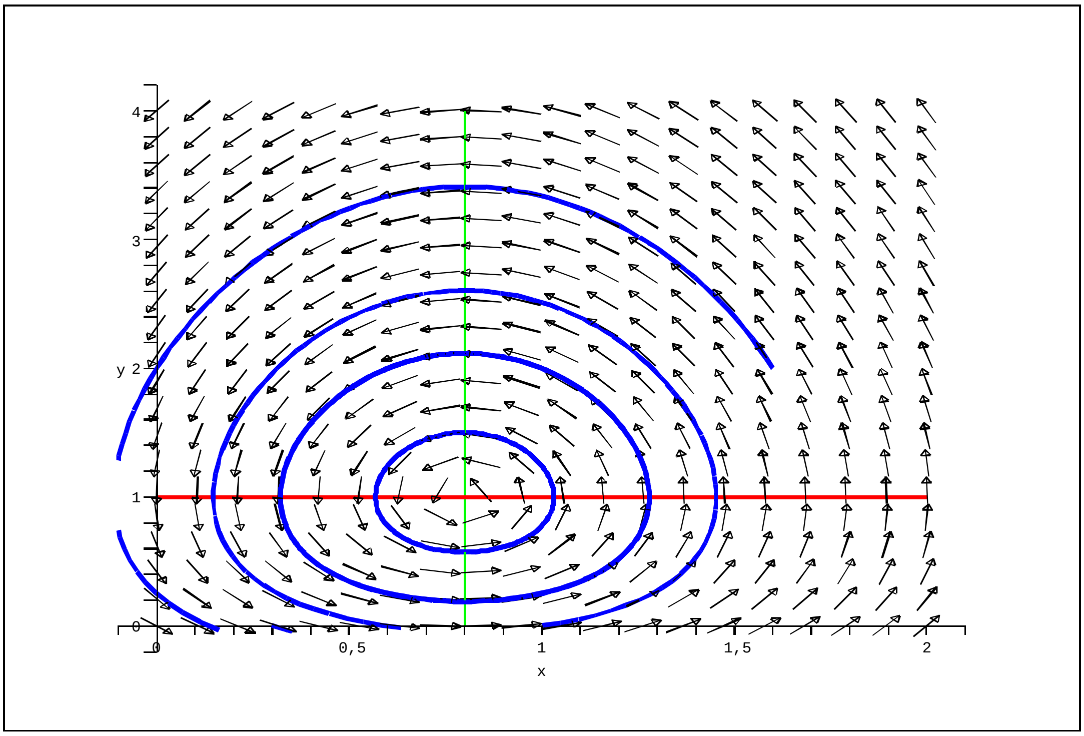

Figure 1: Portrait de phase. $\alpha = 0.5$ et $\beta = 0.8$.