

1 Intégrales premières

Énoncé

Considérons le système dynamique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y \\ \dot{y} = 2x - 3x^2 \end{cases}$$

Faire l'analyse complète du système (points d'équilibre, stabilité, portrait de phase). Il pourra être utile d'introduire une fonction $H(x, y)$ à déterminer pour confirmer l'existence de centres autour d'un des points d'équilibre.

Correction

1. Points d'équilibres

Ce système comporte deux points d'équilibre : $(0, 0)$ et $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$.

2. Stabilité des points d'équilibre

Pour étudier leur stabilité, on linéarise au voisinage de chacun des points d'équilibre. La matrice jacobienne du système est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 - 6x & 0 \end{pmatrix}$$

(a) point d'équilibre $(0, 0)$:

$$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det J_{(0,0)} = -4 < 0$ donc $(0, 0)$ est un point selle pour le système linéarisé. C'est un point d'équilibre hyperbolique donc le portrait de phase est préservé au voisinage du point.

(b) point d'équilibre $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$:

$$J_{\left(\frac{2}{3}, 0\right)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On reconnaît la matrice d'un centre. C'est un point d'équilibre non hyperbolique. On ne peut donc pas conclure sur le portrait de phase du système non linéaire au voisinage de ce point.

3. Conservation des centres

Pour vérifier si les centres autour du point $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$ sont conservés on utilise une intégrale première. On cherche la fonction $H(x, y)$ qui vérifie $\dot{H}(x, y) = 0$ le long des trajectoires solutions.

H est donnée par : $\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{2x - 3x^2}$ donc $(2x - 3x^2) dx = 2y dy$

En intégrant on obtient : $x^2 - x^3 = y^2 + K$. On pose donc :

$$H(x, y) = x^3 + y^2 - x^2$$

Pour vérifier que les centres sont préservés, il faut montrer que H admet un extremum local au point d'équilibre. On utilise un développement de Taylor à l'ordre 2 :

- $\frac{\partial H}{\partial x} = 3x^2 - 2x$ d'où $\left. \frac{\partial H}{\partial x} \right|_{(\frac{2}{3}, 0)} = 0$
- $\frac{\partial H}{\partial y} = 2y$ d'où $\left. \frac{\partial H}{\partial y} \right|_{(\frac{2}{3}, 0)} = 0$
- $\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = 6x - 2$ d'où $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \right|_{(\frac{2}{3}, 0)} = 2$
- $\frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = 2$ d'où $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right|_{(\frac{2}{3}, 0)} = 2$
- $\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0$ d'où $\left. \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} \right|_{(\frac{2}{3}, 0)} = 0$

On obtient ainsi : $H(x, y) - H\left(\frac{2}{3}, 0\right) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 + (y - 0)^2 > 0$, pour tout point au voisinage du point d'équilibre. Donc le point d'équilibre est un minimum local pour la fonction H . Donc les courbes de niveau de H se referment. Donc les centres sont préservés au voisinage du point d'équilibre.

4. Portrait de phase

Isoclines nulles :

- isoclines verticales ($\dot{x} = 0$) : courbe d'équation $y = 0$. Orientation des vecteurs vitesse sur l'isocline : $\dot{y} > 0$ si $x > 0$ ou $x < \frac{2}{3}$.
- isoclines horizontales ($\dot{y} = 0$) : courbes d'équation $x = 0$ et $x = \frac{2}{3}$. Sur ces deux isoclines $\dot{x} > 0$ si $y > 0$.

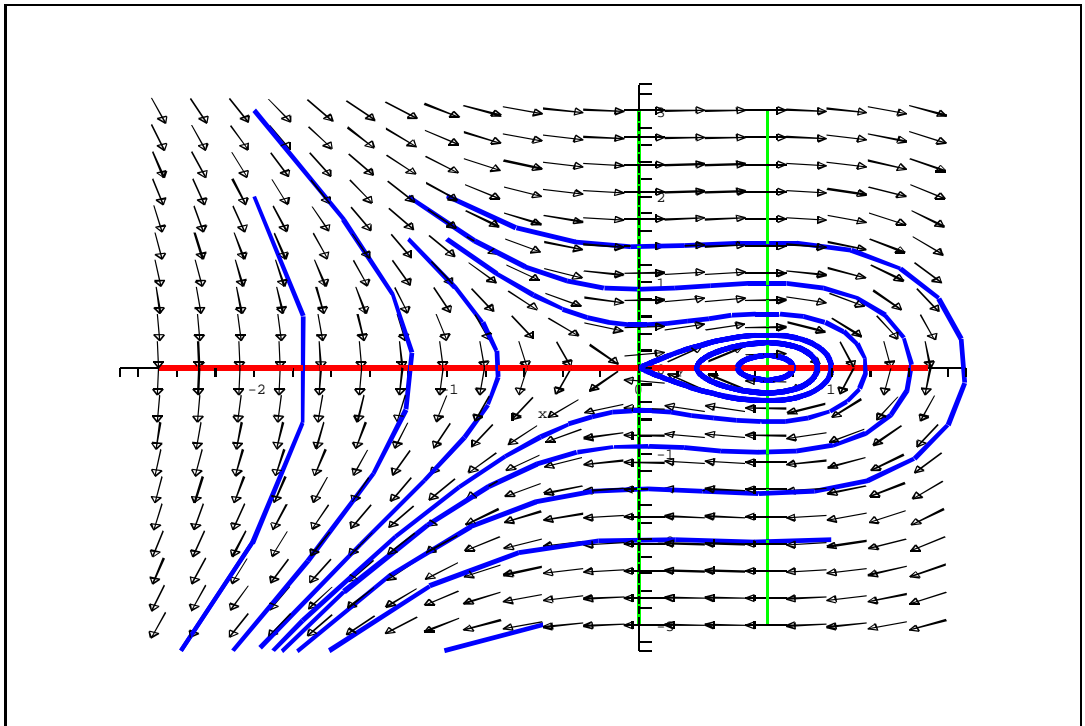


Figure 1: Portrait de phase