1 Intégrales premières

Énoncé

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$$

Étudier complètement ce système et faire l'analyse de la conservation des centres par une étude de fonction.

Correction

1. **Points d'équilibres**

   Ce système comporte deux points d'équilibre : $(0,0)$ et $(1,1)$.

2. **Stabilité des points d'équilibre**

   Pour étudier leur stabilité, on linéarise au voisinage de chacun des points d'équilibre. La matrice jacobienne du système est la suivante :

   $$J = \begin{pmatrix} 1-y & -x \\ y & x-1 \end{pmatrix}$$

   (a) point d'équilibre $(0,0)$:

   $$J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   $\det J_{(0,0)} = -1 < 0$ donc $(0,0)$ est un point selle pour le système linéarisé. C'est un point d'équilibre hyperbolique donc le portrait de phase est préservé au voisinage du point.

   (b) point d'équilibre $(1,1)$:

   $$J_{(\frac{2}{3},0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   La linéarisation prévoit des centres. C'est un point d'équilibre non hyperbolique. On ne peut donc pas conclure sur le portrait de phase du système non linéaire au voisinage de ce point.

3. **Conservation des centres**

   Pour vérifier si les centres autour du point $(1,1)$ sont conservés on utilise une intégrale première. On cherche la fonction $H(x,y)$ qui vérifie $\dot{H}(x,y) = 0$ le long des trajectoires solutions.

   H est donnée par : $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x(1-y)}{y(x-1)}$ donc $\dfrac{(x-1)}{x}\,dx = \dfrac{(1-y)}{y}\,dy$

   En intégrant on obtient : $x - \ln x = \ln y - y + K$. On pose donc :

   $$H(x,y) = x - \ln x + y - \ln y$$

Pour vérifier que les centres sont préservés, il faut montrer que H admet un extremum local au point d'équilibre. On utilise un développement de Taylor à l'ordre 2 :

- $\dfrac{\partial H}{\partial x} = 1 - \dfrac{1}{x}$ d'où $\left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{(1,1)} = 0$
- $\dfrac{\partial H}{\partial y} = 1 - \dfrac{1}{y}$ d'où $\left.\dfrac{\partial H}{\partial y}\right|_{(1,1)} = 0$
- $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \dfrac{1}{x^2}$ d'où $\left.\dfrac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right|_{(1,1)} = 1$
- $\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \dfrac{1}{y^2}$ d'où $\left.\dfrac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right|_{(1,1)} = 1$
- $\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} = 0$ d'où $\left.\dfrac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\right|_{(1,1)} = 0$

On obtient ainsi : $H(x,y) - H(1,1) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 > 0$, pour tout point au voisinage du point d'équilibre. Donc le point d'équilibre est un minimum local pour la fonction H. Donc les courbes de niveau de H se referment. Donc les centres sont préservés au voisinage du point d'équilibre.

4. **Portrait de phase**

   Isoclines nulles :

   - isoclines verticales ($\dot{x} = 0$) : courbes d'équation $x = 0$ et $y = 1$.
     - Orientation des vecteurs vitesse sur l'isocline $x = 0$:
       $\dot{y} = -y > 0$ si $y < 0$.
     - Orientation des vecteurs vitesse sur l'isocline $y = 1$:
       $\dot{y} = x - 1 > 0$ si $x > 1$.
   - isoclines horizontales ($\dot{y} = 0$) : courbes d'équation $y = 0$ et $x = 1$.
     - Orientation des vecteurs vitesse sur l'isocline $y = 0$:
       $\dot{x} = x > 0$ si $x > 0$.
     - Orientation des vecteurs vitesse sur l'isocline $x = 1$:
       $\dot{x} = 1 - y > 0$ si $y < 1$.

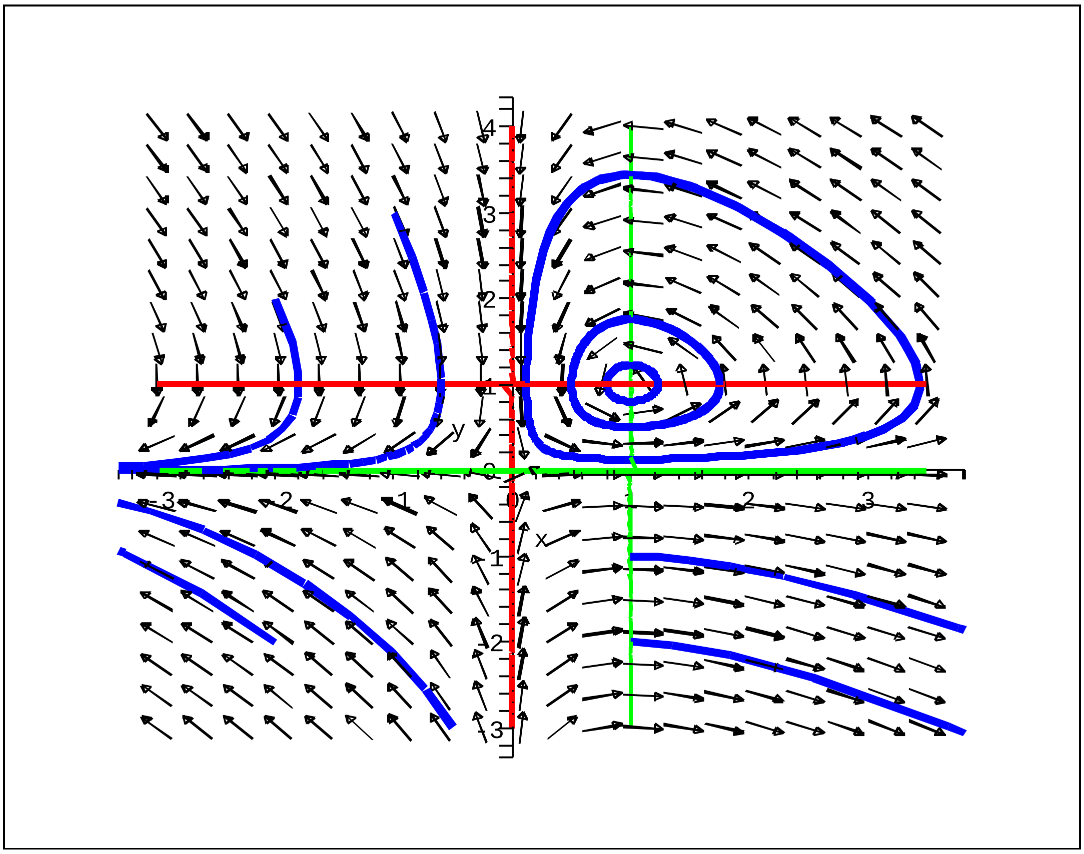

Figure 1: Portrait de phase