1 Fonctions de Lyapunov

Énoncé

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x} = ax - y - x(x^2+y^2) \\ \dot{y} = x + ay - y(x^2+y^2) \end{array}\right.$$

1. Montrer que la fonction $V(x,y) = x^2 + y^2$ est définie positive.
2. Étudier le signe de $\dot{V}$. En déduire que V est une fonction de Lyapunov pour le système considéré.
3. Déterminer la nature du point d'équilibre $(0,0)$.
4. Montrer l'existence d'un cycle limite.

Correction

1. $V(x,y) = x^2 + y^2$ est définie positive sur $\mathbb{R}^2$ car :
   - $V(0,0) = 0$
   - et $V(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
2. $\dot{V}(x,y) = \dfrac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \dfrac{\partial V}{\partial y}\dot{y} = 2x(ax-y-x(x^2+y^2)) + 2y(x+ay-y(x^2+y^2))$

   $\dot{V}(x,y) = 2a(x^2+y^2) - 2(x^2+y^2)(x^2-y^2) = 2[(x^2+y^2)(a-(x^2+y^2))]$

   Donc le signe de $\dot{V}(x)$ est celui de $(a-(x^2+y^2))$:
   - si $a \leq 0, \quad \dot{V}(x) < 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
   - si $a > 0, \quad \dot{V}(x) > 0$ dans un voisinage de $(0,0)$ tel que $x^2+y^2 < a$

   Donc la fonction V est une fonction de Lyapunov pour le système considéré
3. Stabilité du point d'équilibre $(0,0)$:
   - si $a \leq 0$, $(0,0)$ est asymptotiquement stable.
   - si $a > 0$, $(0,0)$ est instable.
4. On change de système de coordonnées et on passe en coordonnées polaires (r,θ), avec :

   $$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array}\right. \quad \text{d'où} \quad \left\{\begin{array}{l} r^2 = x^2+y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{array}\right.$$

   On dérive ces deux expressions :

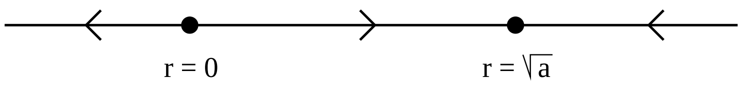
   $2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} = \dot{V}(x,y)$

$$\frac{1}{cos^2\theta}\dot{\theta} = \frac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} = \frac{x^2 + y^2}{x^2} = \frac{r^2}{r^2cos^2\theta}$$

On obtient le système d'équations différentielles : $\begin{cases} \dot{r} = r(a - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

Ce système possède deux points d'équilibre (si a positif) : $r = 0$ et $r = \sqrt{a}$.

En étudiant le signe de $\dot{r}$ on obtient le portrait de phase suivant :



Le système possède donc un cycle limite : c'est le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon $\sqrt{a}$.