

1 Fonctions de Lyapunov

Énoncé

Soit le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = x + ay - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction $V(x, y) = x^2 + y^2$ est définie positive.
2. Étudier le signe de \dot{V} . En déduire que V est une fonction de Lyapunov pour le système considéré.
3. Déterminer la nature du point d'équilibre $(0, 0)$.
4. Montrer l'existence d'un cycle limite.