1 Fonctions de Lyapunov

Énoncé

Rechercher la stabilité de l'équation du second ordre suivante, à l'origine :

$$\ddot{x} + b\dot{x}^3 + x = 0 \tag{1}$$

On transformera cette équation du second ordre en x en un système de deux équations du premier ordre.

1. Linéariser au voisinage du point d'équilibre. Conclure.
2. On utilisera une fonction de Lyapunov (choisie le plus simplement possible). Conclure sur la stabilité.

Correction

L'équation (1) est équivalente au système : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = z \\ \dot{z} = -y - bz^3 \end{array} \right.$

1. Linéarisation au voisinage du point d'équilibre $(0, 0)$:

   $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

   Le point d'équilibre $(0, 0)$ du système linéarisé est un centre. Donc on ne peut pas appliquer le théorème de linéarisation.

2. Soit $V(y, z) = y^2 + z^2$. V est définie positive sur $\mathbb{R}^2$.

   $\dot{V}(y, z) = \dfrac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \dfrac{\partial V}{\partial z}\dot{z} = 2yz + 2z(-y - bz^3) = -2bz^4$

   V est une fonction de Lyapunov pour le système considéré. Et on peut conclure quant à la stabilité du point d'équilibre :

   - si $b > 0$, $\dot{V} < 0$, donc $(0, 0)$ est asymtpotiquement stable.
   - si $b < 0$, $\dot{V} > 0$, donc $(0, 0)$ est instable.
   - si $b = 0$, le système est linéaire et $(0, 0)$ est un centre.