1 Cycle limite

Énoncé

Pour les deux systèmes d'équations différentielles suivants, passer en coordonnées polaires (r, θ). Rechercher et démontrer l'existence d'un cycle limite. Est-il stable?

$$(S_1) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y + x\left[1 - \left(x^2 + y^2\right)\right] \\ \dot{y} = x + y\left[1 - \left(x^2 + y^2\right)\right] \end{array} \right. \qquad (S_2) = \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -y + x\left[\left(x^2 + y^2\right) - 1\right] \\ \dot{y} = x + y\left[\left(x^2 + y^2\right) - 1\right] \end{array} \right.$$

Correction

Passage en coordonnées polaires :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan\theta = \dfrac{y}{x} \end{array} \right.$$

On dérive ces expressions pour obtenir un système d'équations différenteilles en r et θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \\ \dfrac{1}{cos^2\theta}\dot{\theta} = \dfrac{\dot{y}x - y\dot{x}}{x^2} \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \dfrac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} \\ \dot{\theta} = \dfrac{\dot{y}x - y\dot{x}}{r^2} \end{array} \right.$$

1. (S_1) :

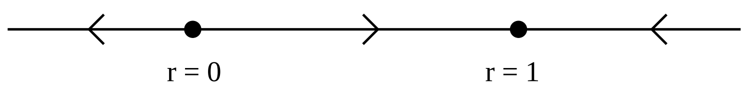
   $$\dot{r} = \frac{x(-y + x(1 - (x^2 + y^2))) + y(x + y(1 - (x^2 + y^2)))}{r}$$

   $$\dot{r} = \frac{(1 - (x^2 + y^2))(x^2 + y^2)}{r} = r(1 - r^2)$$

   $$\dot{\theta} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

   On obtient donc le système suivant : $\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = r(1 - r^2) \\ \dot{\theta} = 1 \end{array} \right.$

   Les points d'équilibre de ce système sont $r = 0$ et $r = 1$. En étudiant le signe de $\dot{r}$, on obtient le portrait de phase suivant :

   Donc le système (S_1) possède un point d'équilibre $(0, 0)$ instable et un cycle limite stable : le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.

2. (S_2) :

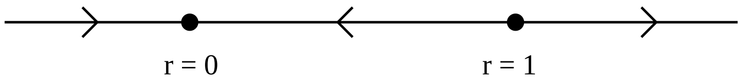
$$\dot{r} = \frac{x(-y + x((x^2 + y^2) - 1)) + y(x + y((x^2 + y^2) - 1))}{r}$$

$$\dot{r} = \frac{((x^2 + y^2) - 1)(x^2 + y^2)}{r} = r(r^2 - 1)$$

$$\dot{\theta} = \frac{x^2 + y^2}{r^2} = 1$$

On obtient donc le système suivant : $\begin{cases} \dot{r} = r(r^2 - 1) \\ \dot{\theta} = 1 \end{cases}$

Les points d'équilibre de ce système sont $r = 0$ et $r = 1$. En étudiant le signe de $\dot{r}$, on obtient le portrait de phase suivant :



Donc le système (S_2) possède un point d'équilibre $(0, 0)$ asymptotiquement stable et un cycle limite instable : le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 1.