1 Fonctions de Lyapunov et théorème de Poincaré-Bendixson

Énoncé

On considère le système de deux équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y\left(1 - x^2 - 2y^2\right) \end{cases} \quad \text{(S)}$$

1. Rechercher les points d'équilibre.
2. Faire de l'étude de la stabilité au voisinage des points d'équilibre.
3. Soit la fonction $V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$. Montrer que V est une fonction définie positive et énoncer le théorème de Lyapunov pour fonction faible. Calculer $\dot{V}$.
4. Étudier le signe de $\dot{V}$ pour $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$. Qu'en déduisez-vous (développer) ? Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question 2 ?
5. Étudier le signe de $\dot{V}$ pour $x^2 + y^2 > 1$, et en déduire un ensemble attractant. Énoncer le théorème de Poincaré-Bendixson et l'appliquer. Conclure.

Correction

1. **Points d'équilibres**

   Ce système comporte un seul point d'équilibre : $(0, 0)$.

2. **Stabilité**

   Pour étudier sa stabilité, on linéarise au voisinage du point déquilibre. La matrice jacobienne du système est la suivante :

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2xy & 1 - x^2 - 6y^2 \end{pmatrix}$$

   d'où la jacobienne au point d'équilibre :

   $$J^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a donc :} \quad \begin{cases} \mathrm{Tr}(J^*) = 1 > 0 \\ \mathrm{Det}(J^*) = 1 > 0 \\ \Delta = -3 < 0 \end{cases}$$

   La linéarisation prévoit un foyer instable.

3. **Fonction de Lyapunov**

   $V(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et $V(0, 0) = 0$ donc $V(x, y)$ est une fonction définie positive.

   Théorème de Lyapunov pour fonction faible : cf. cours.

   $\dot{V}(x, y) = y^2(1 - x^2 - 2y^2)$.

4. **Signe de $\dot{V}$**

   $x^2 + y^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x^2 + 2y^2 < 1$.

   Or $x^2 + 2y^2 < 2x^2 + 2y^2$,

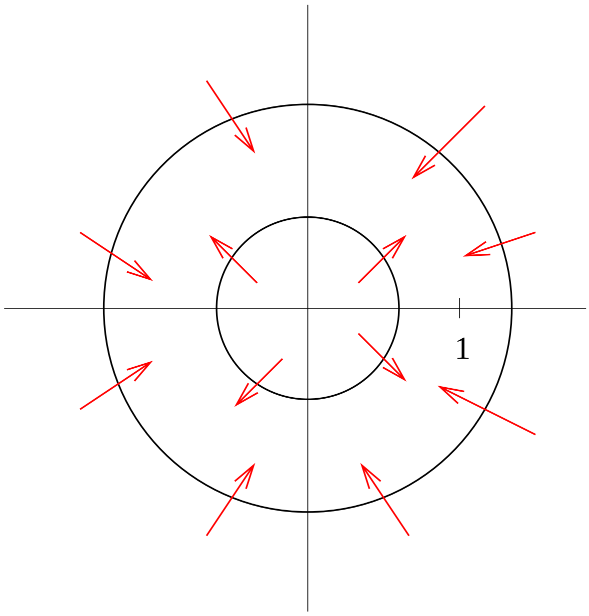
   donc $x^2 + 2y^2 < 1 \Leftrightarrow \dot{V}(x, y) \geq 0$ (car $\dot{V}(x, 0) = 0$).

   Donc pour tout disque de rayon $< \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ les trajectoires "sortent" de ce domaine. Le point d'équilibre contenu dans ce domaine est donc instable, ce qui confirme le résultat obtenue à la question 2.

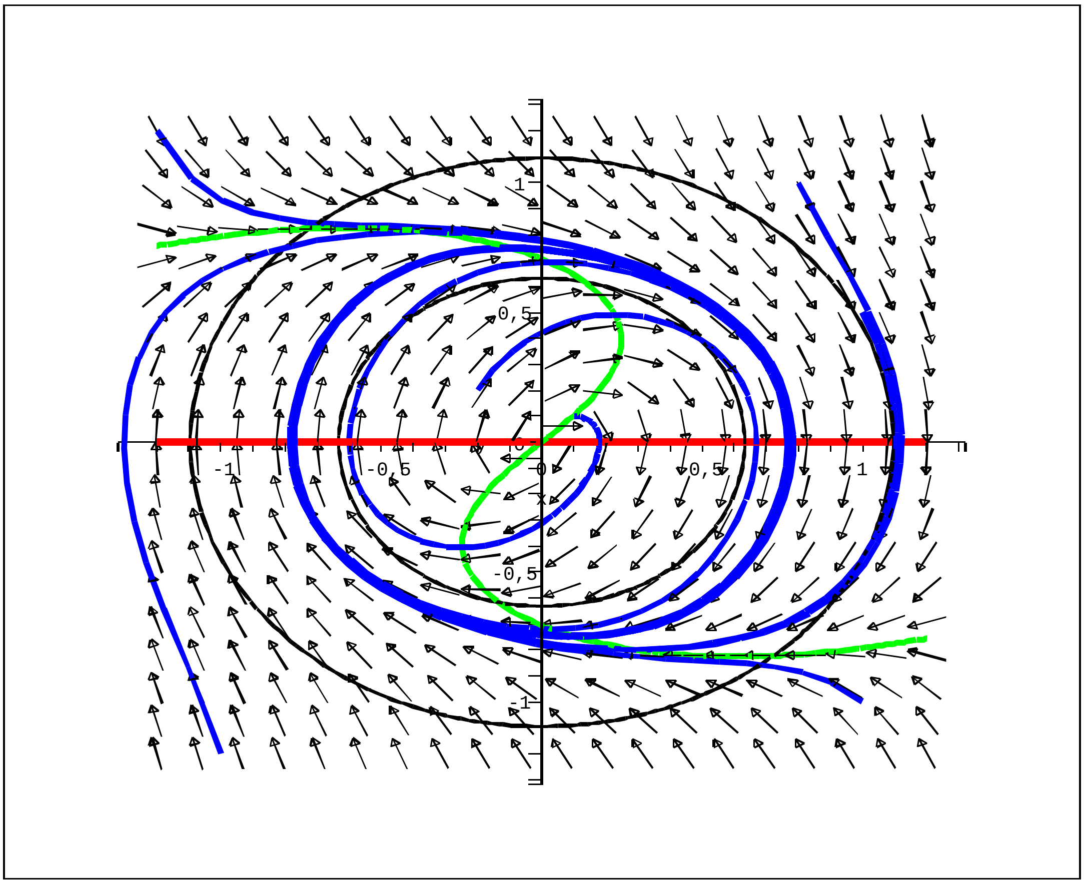
5. **Poincaré-Bendixon**

   $x^2 + 2y^2 > x^2 + y^2$ donc $x^2 + y^2 > 1 \Rightarrow x^2 + 2y^2 > 1$. Donc $\dot{V}(x, y) \leq 0$.

   On en déduit que sur tout cercle de rayon > 1 les trajectoires rentrent dans le disque en question. Donc tout anneau compris entre un cercle de rayon $< \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et un cercle de rayon > 1 est un ensemble attractant pour le système (S). Cet ensemble ne contient pas de point d'équilibre, donc le théorème de Poincaré-Bendixon nous permet de conclure à l'existence d'au moins un cycle limite dans ce domaine.



6. **Portrait de phase** (non demandé)


1
0,5
0
-0,5
-1
-1
-0,5
0
0,5
1