

# 1 Fonctions de Lyapunov et théorème de Poincaré-Bendixson

## Énoncé

On considère le système de deux équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y(1 - x^2 - 2y^2) \end{cases} \quad (\text{S})$$

1. Rechercher les points d'équilibre.
2. Faire de l'étude de la stabilité au voisinage des points d'équilibre.
3. Soit la fonction  $V(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ . Montrer que  $V$  est une fonction définie positive et énoncer le théorème de Lyapunov pour fonction faible. Calculer  $\dot{V}$ .
4. Étudier le signe de  $\dot{V}$  pour  $x^2 + y^2 < \frac{1}{2}$ . Qu'en déduisez-vous (développer) ? Ce résultat est-il cohérent avec celui de la question 2 ?
5. Étudier le signe de  $\dot{V}$  pour  $x^2 + y^2 > 1$ , et en déduire un ensemble attractant. Énoncer le théorème de Poincaré-Bendixson et l'appliquer. Conclure.