1 Fonctions de Lyapunov et théorème de Poincaré-Bendixson

Énoncé

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x - 5y + \frac{6y}{1+x^2} \end{cases}$$

1. Rechercher le (ou les) point(s) d'équilibre(s). Faire l'étude de stabilité locale au voisinage du (ou des) point(s) d'équilibre(s), et déterminer sa (leur) nature.

2. Montrer que la fonction $V(x, y) = 2x^2 + \dfrac{y^2}{2}$ est une fonction définie positive. Donner le théorème de Lyapunov pour fonction faible.

3. Étudier le signe de $\dot{V}$. Retrouver le résultat de la question 1.

4. Énoncer le théorème de Poincaré-Bendixson. Trouver un ensemble positivement invariant (en s'appuyant sur la fonction de Lyapunov et sur des trajectoires du système) permettant d'appliquer le théorème. Conclure.

On donne : $1/\sqrt{5} \cong 0.447$.

Correction

1. **Points d'équilibres**

   Ce système comporte un seul point d'équilibre : $(0, 0)$.

2. **Stabilité**

   Pour étudier sa stabilité, on linéarise au voisinage du point déquilibre. La matrice jacobienne du système est la suivante :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 - \dfrac{12xy}{(1+x^2)^2} & -5 + \frac{6}{1+x^2} \end{pmatrix}$$

   d'où la jacobienne au point d'équilibre :

$$J^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a donc :} \quad \begin{cases} \mathrm{Tr}(J^*) = 1 > 0 \\ \mathrm{Det}(J^*) = 4 > 0 \\ \Delta = -15 < 0 \end{cases}$$

   La linéarisation prévoit un foyer instable.

3. **Fonction de Lyapunov**

   $V(x, y) > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ et $V(0,0) = 0$ donc $V(x,y)$ est une fonction définie positive.

   Théorème de Lyapunov pour fonction faible : cf. cours.

4. **Signe de $\dot{V}$**

   $\dot{V}(x,y) = 4x\dot{x} + y\dot{y} = \frac{y^2}{1+x^2}(1-5x^2)$.

   $\dot{V}$ s'annule pour $y = 0$ et pour $1 - 5x^2 = 0$. Le signe de $\dot{V}$ dépend de celui de $1-5x^2$: $1 - 5x^2 > 0 \quad$ si $x \in \left]-\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right[$ et $1-5x^2 < 0$ sinon.

   Le point d'équilibre appartient au domaine délimité par les deux droites $x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\dot{V} \geq 0$ sur ce domaine donc il est instable.

5. **Poincaré-Bendixon**

   Théorème de Poincaré-Bendixon : cf. cours.

   Sur l'ellipse d'équation $2x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 0.2$, x est compris entre $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, donc $\dot{V}(x,y) > 0$. Donc sur cette ellipse, les trajectoires “sortent”.

   Sur l'ellipse d'équation $2x^2 + \dfrac{y^2}{2} = 3$, x n'est pas toujours compris entre $-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$. On construit donc une boîte comprenant les “morceaux” de cette ellipse pour lesquels x est $< -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ou $> \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, sur ces courbes $\dot{V}(x,y) < 0$, donc les trajectoires “rentrent”. Et on referme la boîte en s'appuyant sur deux trajectoires (cf figure 1).

   On a donc un domaine positivement invariant. On peut appliquer le théormème de Pointcaré-Bendixon et conclure à l'existence d'au moins un cycle limite dans cette boîte.

   (Remarque : la première ellipse n'est pas indispensable)

6. **Portrait de phase** (non demandé)

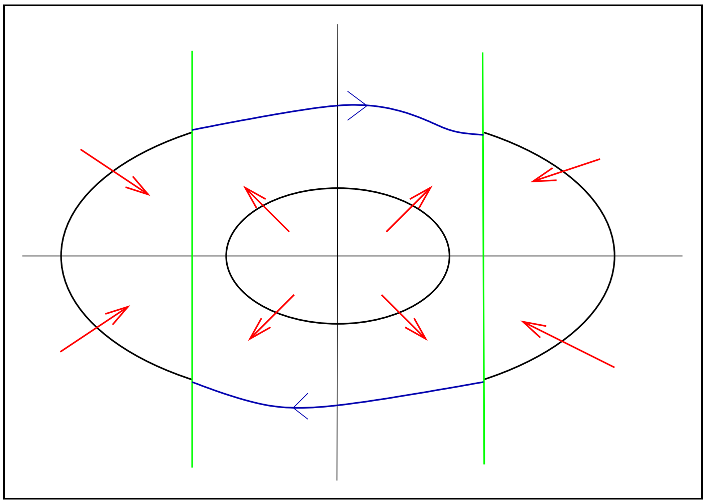

Figure 1: Boîte de Pointcaré-Bendixon.

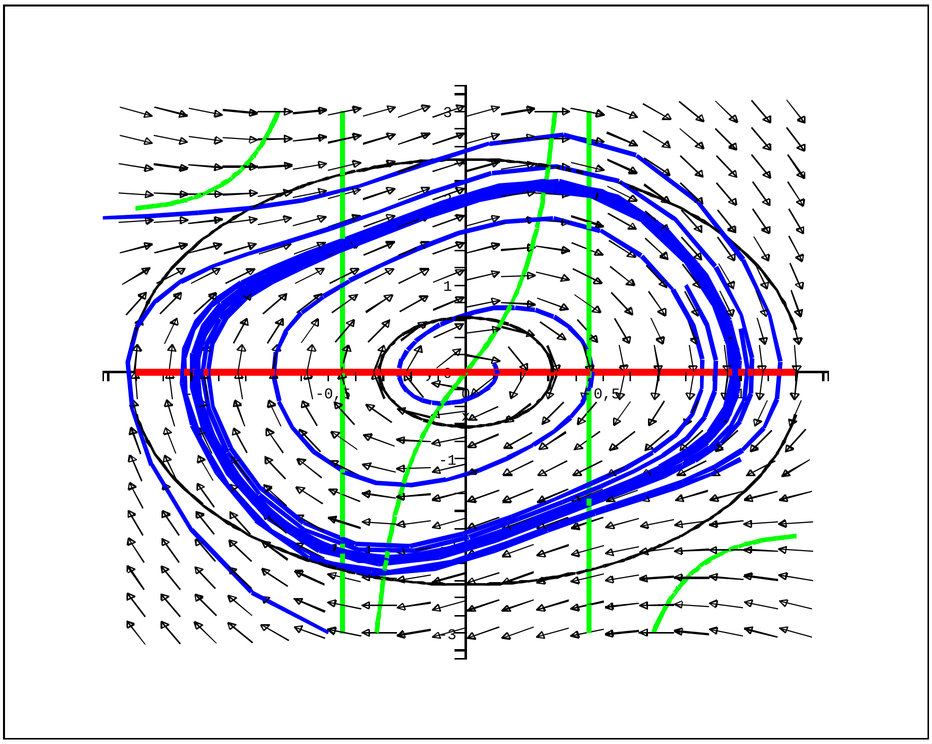

Figure 2: Portrait de phase.