

1 Fonctions de Lyapunov et théorème de Poincaré-Bendixson

Énoncé

On considère le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -4x - 5y + \frac{6y}{1+x^2} \end{cases}$$

1. Rechercher le (ou les) point(s) d'équilibre(s). Faire l'étude de stabilité locale au voisinage du (ou des) point(s) d'équilibre(s), et déterminer sa (leur) nature.
2. Montrer que la fonction $V(x, y) = 2x^2 + \frac{y^2}{2}$ est une fonction définie positive. Donner le théorème de Lyapunov pour fonction faible.
3. Étudier le signe de \dot{V} . Retrouver le résultat de la question 1.
4. Énoncer le théorème de Poincaré-Bendixson. Trouver un ensemble positivement invariant (en s'appuyant sur la fonction de Lyapunov et sur des trajectoires du système) permettant d'appliquer le théorème. Conclure.

On donne : $1/\sqrt{5} \cong 0.447$.