1 Modèle épidémiologique

Énoncé

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = y - x^2 \\ \dot{y} = y - 2x^2 \end{cases}$$

1. Montrer que le seul point d'équilibre est $(0, 0)$.
2. Tracer les isoclines nulles et déterminer la direction des flèches sur ces isoclines.
3. Trouver la matrice jacobienne en $(0, 0)$, montrer que le déterminant est nul et qu'il y a deux valeurs propres $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.
4. Tracer les courbes solutions dans le plan xy.

Correction

1. $y = x^2 = 2x^2$, le seul point d'équilibre est $(0, 0)$.
2. Isocline verticale $y = x^2$, parabole. Isocline horizontale $y = 2x^2$, parabole "moins large".
   Sens des flèches:
   $\dot{y} > 0 \Leftrightarrow y > x^2$
   $\dot{x} > 0 \Leftrightarrow y > 2x^2$
3. $$J = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ -4x & 1 \end{pmatrix}$$
   $$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   $det(J(0, 0)) = 0$ le point d'équilibre est non hyperbolique.
4.

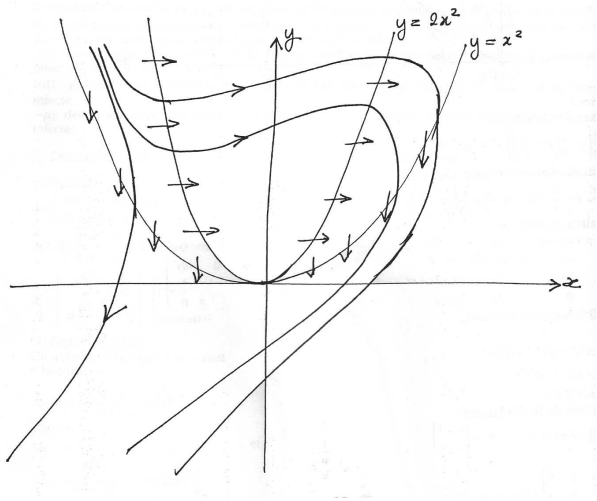

Figure 1: Portrait de phase