1 Étude qualitative des équations dans $\mathbb{R}^n$

Énoncé

Soit le modèle de communauté suivant avec trois populations d'effectifs $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -rx + axy \\ \dot{y} = -bxy + cyz \\ \dot{z} = z(1-z) - dyz \end{cases}$$

1. Tous les paramètres r, a, b, c, d sont positifs. Déterminer l'équilibre non trivial que l'on notera (x^*, y^*, z^*) ainsi que les conditions d'existence de cet équilibre dans le quadrant positif.
2. Déterminer la matrice Jacobienne J au point d'équilibre positif (x^*, y^*, z^*).
3. On note $P(\lambda) = \det(J - \lambda I)$. Mettre l'équation $P(\lambda) = 0$ sous la forme suivante et déterminer les paramètres a_i , i=1, . . . ,3 :
$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$
4. Utiliser le critère de Routh-Hurwitz pour montrer la stabilité de (x^*, y^*, z^*).
5. Écrire la matrice de communauté (matrice de signe).
6. Dessiner le graphe correspondant (graphe de communauté).
7. Appliquer les conditions de Quirk-Ruppert et si nécessaire le test des couleurs. Que concluez-vous ? Est-ce cohérent avec les conditions de Routh-Hurwitz ?

Correction

1. $(x^*, y^*, z^*) = (\frac{c}{b}(1_{\frac{dr}{a}}, \frac{r}{a}, 1 - \frac{dr}{a})$
Condition : $1 - \frac{dr}{a} > 0$
2.
$$J = \begin{pmatrix} -r & ax & 0 \\ -by & -bx + cz & cy \\ 0 & -dz & 1 - 2z - dy \end{pmatrix}$$
$$J^* = \begin{pmatrix} -r & \frac{ac}{b}(1 - \frac{dr}{a}) & 0 \\ -\frac{br}{a} & 0 & \frac{cr}{a} \\ 0 & -d(1 - \frac{dr}{a}) & -(1 - \frac{dr}{a}) \end{pmatrix}$$
3.
$$a_1 = r + (1 - \frac{dr}{a})$$
$$a_2 = r(1 - \frac{dr}{a}) + \frac{cdr}{a}(1 - \frac{dr}{a}) + cr(1 - \frac{dr}{a})$$

$$a_3 = cr(1-\frac{dr}{a})^2 + \frac{cdr^2}{a}(1-\frac{dr}{a})$$

4. $a_1 = r + (1-\frac{dr}{a}) > 0$ si $(1-\frac{dr}{a})$ (condition d'existence du point d'équilibre).
   $a_3 = cr(1-\frac{dr}{a})^2 + \frac{cdr^2}{a}(1-\frac{dr}{a}) > 0$ avec la même condition.
   $a_1 a_2 - a_3 = r^2(1-\frac{dr}{a}) + r^2 c(1-\frac{dr}{a}) + r(1-\frac{dr}{a})^2 + \frac{cdr}{a}(1-\frac{dr}{a})^2 > 0$ avec la même condition.
   Donc il existe un point d'équilibre non trivial stable.

5. $\begin{pmatrix} - & + & 0 \\ - & 0 & + \\ 0 & - & - \end{pmatrix}$

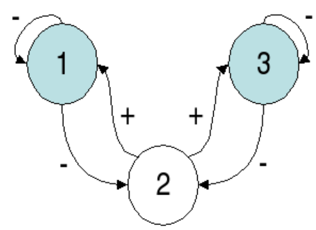

Figure 1: Graphe de communauté

6. Conditions de Quirck-Ruppert :

Condition	Vérifiée?
Pas de rétroaction positive	OUI
Au moins une rétroaction négative	OUI
Pas de lien +/+ ou -/-	OUI
Pas de boucle de 3 ou plus qui se referme	NON (1-2-4-1)
Au moins une flèche entrante dans chaque noeud	OUI

Il existe un point d'équilibre non trivial stable.

Test des couleurs :

Condition	Vérifiée?
Au moins un noeud blanc	OUI
Chaque noeud blanc est connecté à un noeud blanc par un lien +/-	NON
Chaque noeud noir est connecté à deux noeuds blancs par des liens +/-	NON

Toutes les conditions ne sont pas vérifiées donc on peut conclure qu'il existe un point d'équilibre non trivial asymptotiquement stable.
Ce résultat est cohérent avec les conditions de Routh-Hurwitz.