1 Étude qualitative des équations dans $\mathbb{R}^n$

Énoncé

Soit le modèle de communauté suivant avec trois populations d'effectifs $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -rx + axy \\ \dot{y} = -bxy + cyz \\ \dot{z} = z(1-z) - dyz \end{cases}$$

1. Tous les paramètres r, a, b, c, d sont positifs. Déterminer l'équilibre non trivial que l'on notera (x^*, y^*, z^*) ainsi que les conditions d'existence de cet équilibre dans le quadrant positif.

2. Déterminer la matrice Jacobienne J au point d'équilibre positif (x^*, y^*, z^*).

3. On note $P(\lambda) = \det(J - \lambda I)$. Mettre l'équation $P(\lambda) = 0$ sous la forme suivante et déterminer les paramètres a_i , i=1, ... ,3 :

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$$

4. Utiliser le critère de Routh-Hurwitz pour montrer la stabilité de (x^*, y^*, z^*).

5. Écrire la matrice de communauté (matrice de signe).

6. Dessiner le graphe correspondant (graphe de communauté).

7. Appliquer les conditions de Quirk-Ruppert et si nécessaire le test des couleurs. Que concluez-vous ? Est-ce cohérent avec les conditions de Routh-Hurwitz ?