1 Compétition (bruyère vs herbacées)

Énoncé

On s'intéresse dans cet exercice au modèle de G.W. Heil et R. Bobbink (1993) permettant d'étudier le processus de compétition entre la fausse bruyère et deux espèces herbacées : la molinie bleue et la canche flexueuse.

La croissance est ramenée au calcul de la surface couverte par la callune d'une part (S_c) et par les deux herbacées d'autre part (S_h).

Le système d'équations différentielles gouvernant les deux types de surface est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S_c} = r_1 S_c \frac{k - S_c - \varphi_{ch} S_h}{k} \\ \dot{S_h} = r_2 S_h \frac{k - S_h - \varphi_{hc} S_c}{k} \end{array} \right.$$

S_c représente le pourcentage de couverture par la callune,
S_h représente le pourcentage de couverture par les herbacées,
r_1 représente le taux de croissance de la callune,
r_2 représente le taux de croissance des herbacées,
φ_{ch} représente le taux de substitution relatif de l'espèce herbacée par la callune,
φ_{hc} représente le taux de substitution relatif de la callune par l'espèce herbacée.
k représente le pourcentage maximum de couverture (égal à 100).

1. Interpréter les équations. Pourquoi s'agit-il d'un modèle de compétition ?

2. Donner les quatre points d'équilibre du système. Préciser les conditions d'existence de ces points d'équilibre dans le cadran positif ($S_c > 0, S_h > 0$).

3. Faire l'étude de stabilité locale au voisinage de chacun des points d'équilibre. Préciser leur nature. On considèrera ici que $\varphi_{ch} < 1$ et que $\varphi_{hc} < 1$.

4. Dessiner le portrait de phase du système dans le plan (S_c, S_h). Préciser les isoclines nulles horizontales et verticales, ainsi que le sens des vecteurs vitesse sur chacune d'elles. Dessiner quelques trajectoires. Essayer de deviner la position des séparatrices (facultatif).

5. Préciser ce qu'il se passe, pour les conditions initiales suivantes :

   - $S_c = 0$; $S_h > 0$;
   - $S_c > 0$; $S_h = 0$;
   - $S_c > 0$; $S_h > 0$;

   Donner une interprétation biologique dans chacun des cas.

Correction

1.

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{S_c} = r_1 S_c (1 - \frac{S_c}{k} - \frac{\varphi_{ch} S_h}{k}) \\ \dot{S_h} = r_2 S_h (1 - \frac{S_h}{k} - \frac{\varphi_{hc} S_c}{k}) \end{array} \right.$$

Croissance logistique pour les deux espèces + un terme logistique d'interaction (compétition interspécifique).

2. Quatre points fixes : $(0,0)$, $(k,0)$, $(0,k)$, et $(S_c^*, S_h^*) = (k(\frac{1-\varphi_{ch}}{1-\varphi_{hc}\varphi_{ch}}), k(\frac{1-\varphi_{hc}}{1-\varphi_{hc}\varphi_{ch}}))$.
Conditions d'existence :

   - Soit $\varphi_{hc} < 1$ et $\varphi_{ch} < 1$, ce qui parait plus probable étant donné que ce sont des taux relatifs.
   - Soit $\varphi_{hc} > 1$ et $\varphi_{ch} > 1$.

3.
$$J = \begin{pmatrix} r_1(1 - \frac{2S_c}{k} - \frac{\varphi_{ch}S_h}{k}) & -r_1\frac{\varphi_{ch}S_c}{k} \\ -r_2\frac{\varphi_{hc}S_h}{k} & r_2(1 - \frac{2S_h}{k} - \frac{\varphi_{hc}S_c}{k}) \end{pmatrix}$$

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}$$

donc $(0,0)$ est donc un noeud instable.

$$J(k,0) = \begin{pmatrix} -r_1 & -r_1\varphi_{ch} \\ 0 & r_2(1-\varphi_{hc}) \end{pmatrix}$$

2 valeurs propres réelles de signe opposé donc $(k,0)$ est donc un point selle.

$$J(0,k) = \begin{pmatrix} r_1(1-\varphi_{ch}) & 0 \\ -r_2\varphi_{hc} & -r_2 \end{pmatrix}$$

2 valeurs propres réelles de signe opposé donc $(0,k)$ est donc un point selle.

$$J^* = \begin{pmatrix} -\frac{r_1S_c^*}{k} & -\frac{r_1\varphi_{ch}S_c^*}{k} \\ -\frac{r_2\varphi_{hc}S_h^*}{k} & -\frac{r_2S_h^*}{k} \end{pmatrix}$$

$tr(J^*) < 0$
$det(J^*) = \frac{r_1r_2}{k^2}S_c^*S_h^*(1-\varphi_{ch}\varphi_{hc}) > 0$ donc (S_c^*, S_h^*) est un point fixe stable.
$\Delta = tr^2 - 4det = (\frac{r_1S_c^*}{k} - \frac{r_2S_h^*}{k})^2 > 0$ donc (S_c^*, S_h^*) est un noeud stable.

4. Portrait de phase
Isoclines verticales : $\dot{S}_c = 0 \Leftrightarrow S_c = 0$ ou $S_c = k - \varphi_{ch}S_h$ (droite de pente < 0 passant par $(k,0)$ et $(0, k/\varphi_{ch})$).
Isoclines verticales : $\dot{S}_h = 0 \Leftrightarrow S_h = 0$ ou $S_c = 1/\varphi_{hc}(k - S_h)$ (droite de pente < 0 passant par $(0,k)$ et $(k/\varphi_{hc}, 0)$).
Sens des flèches :

   - Si $S_h = 0$, $\dot{S}_c > 0$ entre 0 et k.
   - Si $S_c = 0$, $\dot{S}_h > 0$ entre 0 et k.

5. Conditions initiales :

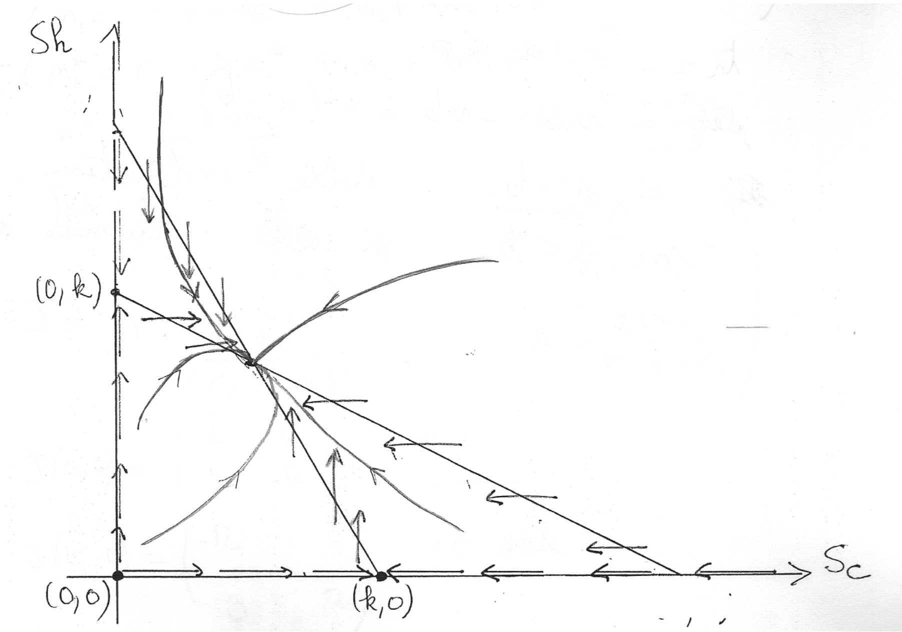

Figure 1: Portrait de phase

- $S_c = 0$; $S_h > 0$; En l'absence de callune, les herbacées vont atteindre leur capacité limite k.
- $S_c > 0$; $S_h = 0$; En l'absence d'herbacées, la callune vont atteindre sa capacité limite k.
- $S_c > 0$; $S_h > 0$; En présence de callune et d'herbacées, le système va atteindre le point non trivial, on aura coexistence des deux population.