

Modèle de compétition avec exploitation

Énoncé

On considère deux populations d'effectifs x et y en compétition et toutes deux exploitées :

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) - axy - Ex \\ \dot{y} = sy \left(1 - \frac{y}{M}\right) - bxy - Fy \end{cases} \quad (1)$$

Tous les paramètres sont positifs. On supposera que $E < r$ et $F < s$.

- Interpréter ces équations.
- On demande de regrouper dans chaque équation le terme de croissance logistique et le terme de pêche pour réécrire le modèle (1) sous la forme (2) :

$$\begin{cases} \dot{u} = \rho x \left(1 - \frac{x}{\Phi}\right) - axy \\ \dot{v} = \sigma y \left(1 - \frac{y}{\Sigma}\right) - bxy \end{cases} \quad (2)$$

Donner l'expression des nouveaux paramètres en fonction des anciens.

- Avant de procéder à l'étude de ce modèle, renormaliser en faisant le changement de variables suivant :

$$u = \frac{x}{\Phi} \quad v = \frac{y}{\Sigma} \quad (3)$$

Montrer que le modèle (2) se met sous la forme (4) :

$$\begin{cases} \dot{x} = \rho u (1 - u) - \alpha uv \\ \dot{y} = \sigma v (1 - v) - \beta uv \end{cases} \quad (4)$$

- Faire l'étude de ce modèle. Pour cela :
 - Rechercher les coordonnées des points d'équilibre.
 - Tracer les isoclines-zéro (avec le sens des vecteurs vitesse).
 - Linéariser au voisinage des points d'équilibre et étudier leurs propriétés de stabilité locale selon les valeurs des paramètres α et β .
 - Dessiner le portrait de phase dans les deux cas suivants (donner une interprétation écologique) :
 - $\sigma > \beta$ et $\rho > \alpha$
 - $\sigma < \beta$ et $\rho < \alpha$