1 Lemmings

Énoncé

Le modèle de H. Dekker (1975) a été réalisé pour rendre compte des évolutions de populations de rongeurs tels que les lemmings en Scandinavie. Soit le modèle suivant pour une population de rongeurs subdivisée en deux groupes d'effectifs n_1 et n_2 correspondant à deux génotypes :

$$\begin{cases} \dot{n_1} = n_1\,(a_1 - b_1 n_2 - c_1 n_1) \\ \dot{n_2} = n_2\,(-a_2 + b_2 n_1) \end{cases}$$

où les a_i, b_i, c_i sont des constantes positives.

Les individus de type 1 se reproduisent rapidement, mais migrent lorsqu'ils sont trop nombreux, ce qui dans le modèle correspond à une disparition. Les individus de type 2 sont moins sensibles aux densités élevées, mais ont une capacité de reproduction plus faible.

1. Rechercher tous les points d'équilibre en donnant la condition d'existence dans le quadrant positif, $n_1, n_2 > 0$.

2. Tracer les isoclines et indiquer l'allure du champ de vecteurs vitesse dans le cas où tous les points d'équilibre existent dans le quadrant positif.

3. Calculer les matrices Jacobiennes en chacun des points d'équilibre. Exprimer les systèmes linéaires valables au voisinage des points d'équilibre.

4. En calculant les valeurs propres ou en utilisant les conditions usuelles (signes de la trace et du déterminant), déterminer s'il y a stabilité locale. Indiquer dans chaque cas, éventuellement en fonction des paramètres, s'il s'agit d'un noeud, d'un foyer stable - instable, d'un point selle ou d'un centre.

5. Étude du cas où l'un des points d'équilibre est un foyer stable. On suppose des conditions initiales au voisinage de ce foyer; Que se passe-t-il ? Donner une interprétation écologique.

Correction

1. Points d'équilibre : $(0,0)$, $(\frac{a_1}{c_1})$, et $(n_1^*, n_2^*) = (\frac{a_2}{b_2}, \frac{1}{b_1}(a_1 - a_2 c_1 b_2))$ (condition d'existence $a_1 b_2 > a_2 c_1$).

2. Isoclines
   $\dot{n_1} = 0 \Leftrightarrow n_1 = 0$ ou $n_2 = \frac{a_1}{b_1}(1 - \frac{c_1 n_1}{a_1})$
   $\dot{n_2} = 0 \Leftrightarrow n_2 = 0$ ou $n_1 = \frac{a_2}{b_2}$
   Sens des flèches :
   Si $n_2 = 0$, $\dot{n_1} > 0 \Leftrightarrow 0 < n_1 < \frac{a_1}{c_1}$.
   Si $n_1 = 0$, $\dot{n_2} < 0$.

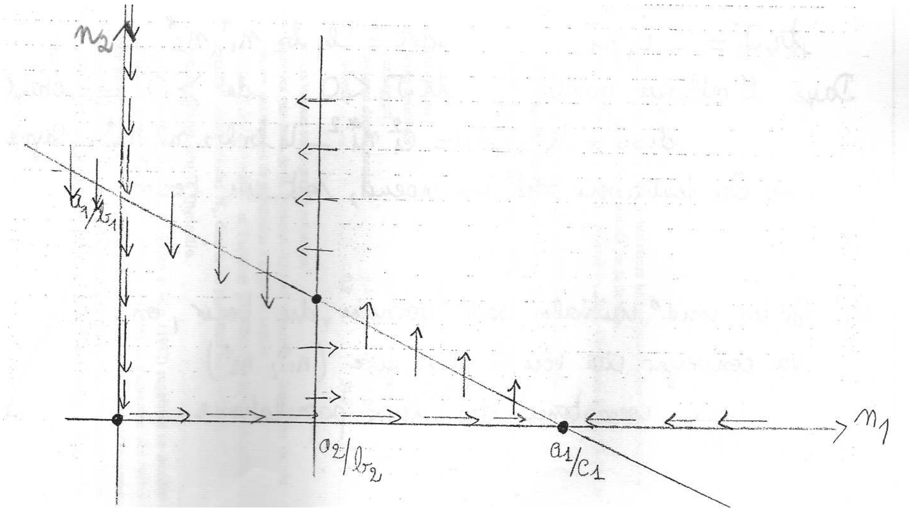

Figure 1: Portrait de phase

3.
$$J = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 n_2 - 2c_1 n_1 & -b_1 n_1 \\ b_2 n_2 & -a_2 + b_2 n_1 \end{pmatrix}$$

4.
$$J(0,0) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & -a_2 \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ est un point selle.

$$J(\frac{a_1}{c_1}, 0) = \begin{pmatrix} -a_1 & -\frac{b_1 a_1}{c_1} \\ 0 & \frac{b_2 a_1}{c_1} - a_2 \end{pmatrix}$$

$det = a_1(a_2 - \frac{b_2 a_1}{c_1}) < 0$ donc $(\frac{a_1}{c_1}, 0)$ est un point selle.

$$J^* = \begin{pmatrix} -c_1 n_1^* & -b_1 n_1^* \\ b_2 n_2^* & 0 \end{pmatrix}$$

$tr(J^*) = -c_1 n_1^* < 0$
$det(J) = b_1 b_2 n_1^* n_2^* > 0$ donc (n_1^*, n_2^*) est un point d'équilibre stable (soit un noeud, soit un foyer selon le signe du discriminant).

5. Si les conditions initiales sont voisines du foyer, on va converger vers le point fixe (n_1^*, n_2^*) (coexistence des deux populations).