1 Malaria

Énoncé

La première tentative pour décrire de manière quantitative la dynamique de la transmission de la Malaria est le modèle de Ross-Macdonald (Ross, 1911, 1916 ; Macdonald, 1952, 1957, 1973), qui est encore aujourd'hui à la base des études épidémiologiques sur la Malaria.

Ce modèle, qui traduit les interactions entre les proportions d'individus infectés dans la population hôte (les hommes), et dans la population de vecteurs (les moustiques), est défini comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = \left(\frac{abM}{N}\right) y\,(1-x) - rx \\ \dot{y} = ax\,(1-y) - \mu y \end{cases}$$

- x est la **proportion** d'individus infectés dans la population humaine,
- y est la **proportion** d'individus infectés dans la population de moustiques,
- N est la taille de la population humaine,
- M est la taille de la population des moustiques femelles,
- $m = M/N$ est le nombre de femelles moustiques par homme hôte,
- a est le nombre de piqûres par unité de temps,
- b est la proportion de piqûres qui occasionnent effectivement la maladie,
- r est la vitesse de guérison d'un homme malade,
- μ est le taux de mortalité des moustiques.

1. Interpréter les équations.
2. Trouver les points d'équilibre du système (donner éventuellement les conditions d'existence). On pose $\alpha = abm$ et $R = \frac{a\alpha}{\mu r}$. Exprimer le point d'équilibre non trivial (x^*, y^*) en fonction de R, a et μ.
3. Faire l'étude de la stabilité des points d'équilibre. Expliquer.
4. Tracer les isoclines nulles ainsi que le sens des vecteurs vitesse, dans le cas où tous les points d'équilibre existent. Dessiner l'allure des trajectoires.

Correction

1. $-rx$: décroissance exponentielle de la population d'hommes infectés en l'absence de moustiques infectés.
   $-\mu y$: décroissance exponentielle de la population de moustiques infectés en l'absence d'hommes infectés.
   $ax(1-y)$: nombre de moustiques qui deviendront infectés par piqûre d'un

homme infecté.
$\frac{abM}{N}$: quantité d'hommes sains qui seront piqués par des moustiques infectés et qui deviendront infectés.

2. Deux points fixes : $(0,0)$ et $(\frac{R-1}{R+a/\mu}, \frac{R-1}{R(1+\mu/a)})$.
   Condition d'existence : $R > 1$.

3. Stabilité
$$J = \begin{pmatrix} -\alpha y - r & \alpha(1-x) \\ \alpha(1-y) & -\alpha x - \mu \end{pmatrix}$$
$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -r & \alpha \\ a & -\mu \end{pmatrix}$$
   $det(J(0,0) = r\mu - a\alpha < 0$ car $R > 1$ donc $(0,0)$ est donc un point selle.
$$J^* = \begin{pmatrix} -\alpha\frac{y^*}{x^*} & r\frac{x^*}{y^*} \\ \mu\frac{y^*}{x^*} & -a\frac{x^*}{y^*} \end{pmatrix}$$
   $tr(J^*) = -\alpha\frac{y^*}{x^*} - a\frac{x^*}{y^*} < 0$ $det(J^*) = -r\mu + a\alpha > 0$ car $R > 1$ donc (x^*, y^*) est un point fixe stable.

4. Portrait de phase x et y sont des proportions et donc $x, y < 1$.
   Isoclines verticales : $\dot{x} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{rx}{\alpha(1-x)} = f(x)$, $f(0) = 0$, $\lim_{x->1} f(x) = +\infty$, $f'(x) = \frac{r}{\alpha(1-x)^2} > 0$ et $f'(0) = r/\alpha$.
   Isoclines horizontales : $\dot{y} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{ax}{\mu+ax)} = g(x)$, $g(0) = 0$, $g(1) = 1/\mu$, $g'(x) = \frac{\mu a}{(\mu+ax)^2} > 0$ et $g'(0) = a/\mu$.
   On remarque que $g'(0) > f'(0)$ car $R > 1$.
   Sens des flèches : l'astuce consiste à se placer sur $x = 1$, puis sur $y = 1$.
   Si $x = 1$, $\dot{x} = -r < 0$.
   Si $y = 1$, $\dot{y} = -\mu < 0$.

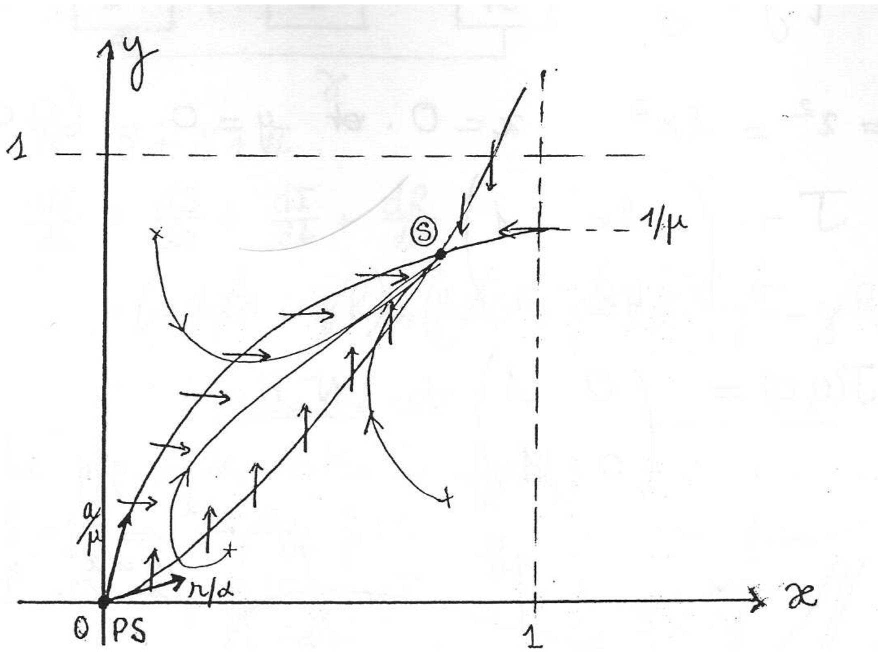

Figure 1: Portrait de phase