1 Mutualisme

Énoncé

Modèle de dynamique de populations (mutualisme : d'après J.D. Murray " Mathematical Biology " 1989)

Soit le modèle suivant décrivant la dynamique des populations $n_1(t)$ et $n_2(t)$:

$$\begin{cases} \dot{n_1} = rn_1\left(1 - \frac{n_1}{K_1 + an_2}\right) \\ \dot{n_2} = rn_2\left(1 - \frac{n_2}{K_2 + bn_1}\right) \end{cases}$$

Tous les paramètres sont positifs.

1. Donner une interprétation de ces équations (signification des paramètres). Expliquer pourquoi ce modèle constitue un modèle de mutualisme.

2. Rechercher les coordonnées des points d'équilibre. Donner pour chacun d'entre eux la signification du point de vue écologique. Assurez-vous qu'ils se trouvent dans le cadrant positif. En déduire une condition sur les paramètres du modèle.

   Dans la suite, on se limitera au cas où il existe un point d'équilibre appartenant à l'intérieur du cadrant positif.

3. Linéarisation du système au voisinage des points singuliers. Calculer la matrice Jacobienne générale et au voisinage de chaque point d'équilibre.

4. Stabilité locale. En calculant les valeurs propres ou en utilisant les conditions usuelles (signes de la trace et du déterminant), déterminer s'il y a stabilité locale. Indiquer dans chaque cas, s'il s'agit d'un noeud, d'un foyer stable / instable, d'un centre ou d'un point selle.

5. Portraits de phase : analyse qualitative. Tracer les isoclines et indiquer l'allure du champs de vecteurs vitesses et des trajectoires dans le quadrant positif. Donner une interprétation écologique du portrait de phase (trajectoires).