1 Ventilation en CO_2

Énoncé

On définit :
$C(t)$ = la concentration de CO_2 dans le sang au temps t.
$V(t)$ = l'amplitude du volume de ventilation au temps t.
Le processus de la ventilation en CO_2 peut être décrit par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{C} = -L(V, C) + m \\ \dot{V} = S(C) - \varepsilon V \end{cases}$$

où L est vitesse de disparition du CO_2 par unité de temps, et S le changement de ventilation induit par le CO_2 par unité de temps.

1. On suppose dans un premier temps que L et S sont des fonctions linéaires telles que :

   $L(V, C) = \beta V$ et $S(C) = \alpha C$
   Trouver les points d'équilibre et déterminer les valeurs propres de la Jacobienne. Montrer que des oscillations amorties peuvent apparaître si $\varepsilon < 4\alpha\beta$.
   Tracer le plan de phase du système.

2. Considérons maintenant la situation suivante :

   $L(V, C) = \beta VC$ et $S(C) = \alpha C$
   Répéter l'analyse précédente.

Correction

1. Un point d'équilibre : $(\frac{\varepsilon m}{\alpha\beta}, \frac{m}{\beta})$.

   $$J = \begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \alpha & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

   $tr(J) = -\varepsilon < 0$
   $det(J) = \alpha\beta > 0$ donc $(\frac{\varepsilon m}{\alpha\beta}, \frac{m}{\beta})$ est un point d'équilibre stable.
   $\Delta = \varepsilon^2 - 4\alpha\beta$, on a des oscillations amorties si le point d'équilibre est un foyer stable, *ie.* si $\Delta < 0$, *ie.* $\varepsilon^2 < 4\alpha\beta$.

   Portrait de phase (figure 1)
   Isoclines verticales : $\dot{C} = 0 \Leftrightarrow V = \frac{m}{\beta}$.
   Isoclines horizontales : $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow V = \frac{\alpha C}{\varepsilon}$.
   Sens des flèches : si $V = m/\beta$, $\dot{V} > 0$ si $C > \frac{\varepsilon m}{\alpha\beta}$. Si $V = 0$, $\dot{C} = m > 0$.

2. Un point d'équilibre : $(\sqrt{\frac{\varepsilon m}{\alpha\beta}}, \sqrt{\frac{\alpha m}{\beta\varepsilon}})$.

   $$J = \begin{pmatrix} -\beta V & -\beta C \\ \alpha & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

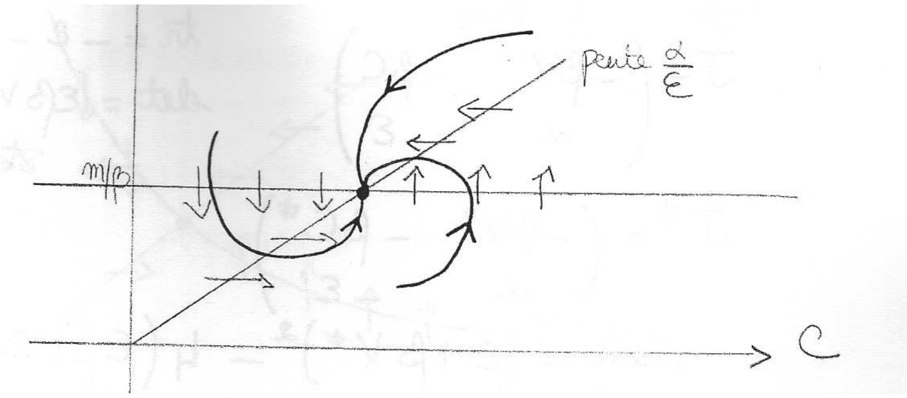

Figure 1: Portrait de phase 1

$$J^* = \begin{pmatrix} -\beta V^* & -\beta C^* \\ \alpha & -\varepsilon \end{pmatrix}$$

$tr(J^*) = -\varepsilon - \beta V^* < 0$
$det(J^*) = \varepsilon\beta V^* + \alpha\beta C^* > 0$ donc (C^*, V^*) est un point d'équilibre stable.
$\Delta = (\varepsilon + \beta V^*)^2 - 4(\varepsilon\beta V^* + \alpha\beta C^*)$. On a des oscillations amorties si le point d'équilibre est un foyer stable, *ie.* si $\Delta < 0$, *ie.* $8\delta > (\varepsilon + \delta/\varepsilon)^2$ avec $\delta = \sqrt{\alpha\beta\varepsilon m}$.

Portrait de phase (figure 2)
Isoclines verticales : $\dot{C} = 0 \Leftrightarrow V = \frac{m}{\beta C}$.
Isoclines horizontales : $\dot{V} = 0 \Leftrightarrow V = \frac{\alpha C}{\varepsilon}$.
Sens des flèches : sur $V = \frac{m}{\beta C}$, $\dot{V} > 0$ si $C > \sqrt{\frac{\varepsilon m}{\alpha\beta}}$. Si $\dot{V} = 0$, $\dot{C} > 0 \Leftrightarrow V < \frac{m}{\beta C}$.

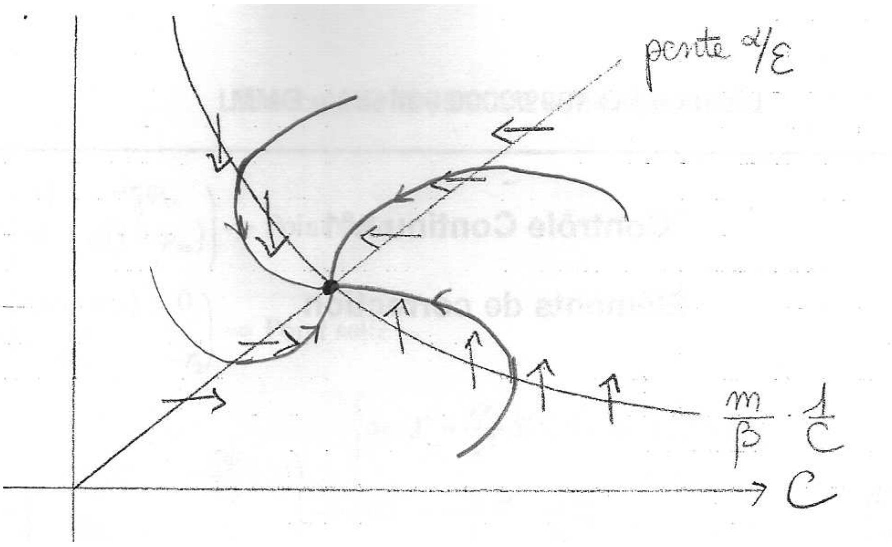

Figure 2: Portrait de phase 2