1 Résolution explicite des systèmes dynamiques planaires (Matrices de Jordan)

Énoncé

Pour chaque système linéaire suivant:
(a) Rechercher le point d'équilibre, indiquer sa nature et sa stabilité.
(b) Mettre la matrice $\mathbf{A}$ (du système linéaire) sous sa forme de Jordan réelle (faire le changement de base).
(c) Calculer l'exponentielle de $\mathbf{J}t$.
(d) Calculer l'exponentielle de $\mathbf{A}t$.
(e) Pour la condition initiale donnée (x_0, y_0) donner la solution explicite $(x(t),y(t))$.

$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = -2x + 7y \\ \dot{y} = 2x + 3y\end{array}\right.$ avec $(x_0, y_0) = (1, 1)$

$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = y \\ \dot{y} = -x\end{array}\right.$ avec $(x_0, y_0) = (1, -1)$

$\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = -4x + y \\ \dot{y} = -x - 2y\end{array}\right.$ avec $(x_0, y_0) = (1, 2)$

Correction

Pour $\left\{\begin{array}{l}\dot{x} = -2x + 7y \\ \dot{y} = 2x + 3y\end{array}\right.$

(a)

$\left\{\begin{array}{l}-2x + 7y = 0 \\ 2x + 3y = 0\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}2x = 7y \\ 2x = -3y\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}x = 0 \\ y = 0\end{array}\right.$

Le point d'équilibre est (0,0)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

tr(A)=1
det(A)=-20
le point d'équilibre est donc in point selle, instable.

(b)
$\Delta = 1^2 + 4 * 20 = 81 > 0$
$\lambda_1 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 - \sqrt{81}}{2} = -4$
$\lambda_2 = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1 + \sqrt{81}}{2} = 5$

Le calcul des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 conduit à $U_1 = \binom{7}{2}$ et $U_2 = \binom{1}{1}$. On a alors:
$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. On vérifie enfin que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

(c)
$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & 0 \\ 0 & e^{5t} \end{pmatrix}$$

(d)
$$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} 7e^{-4t} + 2e^{5t} & -7e^{-4t} + 7e^{5t} \\ -2e^{-4t} + 2e^{5t} & 2e^{-4t} + 7e^{5t} \end{pmatrix}$$

(e)
$x(t) = x_0(7e^{-4t} + 2e^{5t}) + y_0(-7e^{-4t} + 7e^{5t}) = 9e^{5t}$
$y(t) = x_0(-2e^{-4t} + 2e^{5t}) + y_0(2e^{-4t} + 7e^{5t}) = 9e^{5t}$

Pour $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{array} \right.$
(a)
$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \end{array} \right.$ Le point d'équilibre est (0,0)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

tr(A)=0
det(A)=1
le point d'équilibre est donc un centre.

(b)
la matrice **A** est déjà sous forme de Jordan.

(c)
$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} cos(-t) & -sin(-t) \\ sin(-t) & cos(-t) \end{pmatrix}$$

(d)
$e^{tA} = e^{tJ}$

(e)
$x(t) = x_0 cos(-t) - y_0 sin(-t) = cos(-t) + sin(-t)$
$y(t) = x_0 sin(-t) + y_0 cos(-t) = sin(-t) - cos(-t)$

Pour $\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = -4x + y \\ \dot{y} = -x - 2y \end{array} \right.$
(a)
$\left\{ \begin{array}{l} -4x + y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} 7x = y \\ x = -2y \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$
Le point d'équilibre est (0,0)

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

tr(A)=-6
det(A)=9
le point d'équilibre est donc stable.

(b)
$\Delta = (-6)^2 - 4 * 9 = 0$
$\lambda_{1,2} = \frac{tr(A)-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-6}{2} = -3$
Le calcule d'un vecteurs propres associés à $\mathbf{A}$ conduit à $u_0 = \binom{1}{1}$. On choisie alors un vecteur indépendant de u_0, $m_2 = \binom{1}{-1}$. On a alors:
$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.
On obtient alors $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
Pour retrouver la forme De Jordan, on définie une nouvelle matrice de passage:
$mathbfP_1 = \mathbf{P} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
avec $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
On vérifie enfin que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.

(c)
$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{-3t} & te^{-3t} \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix}$

(d)
$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} 7e^{-4t} + 2e^{5t} & -7e^{-4t} + 7e^{5t} \\ -2e^{-4t} + 2e^{5t} & 2e^{-4t} + 7e^{5t} \end{pmatrix}$

(e)
$x(t) = x_0(7e^{-4t} + 2e^{5t}) + y_0(-7e^{-4t} + 7e^{5t}) = 9e^{5t}$
$y(t) = x_0(-2e^{-4t} + 2e^{5t}) + y_0(2e^{-4t} + 7e^{5t}) = 9e^{5t}$