1 Résolution explicite des systèmes dynamiques planaires (Matrices de Jordan)

Énoncé

Soit le système linéaire suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2x - 2y \end{array} \right.$$

(a) Rechercher le point d'équilibre et indiquer sa nature (foyer, noeud, point selle, etc.) et sa stabilité.
(b) mettre la matrice $\mathbf{A}$ (du système linéaire) sous forme de Jordan réelle (faire le changement de base). On choisira la composante sur l'axe de x du vecteur propre associé à la valeur propre $\alpha + i\beta$ égale à 1.
(c) Calculer l'exponentielle de $\mathbf{J}t$
(d) Calculer l'exponentielle de $\mathbf{A}t$
(e) Pour une condition initiale $(x(0),y(0))$, donner la solution explicite de $(x(\mathrm{t}),y(\mathrm{t}))$.

Correction

(a)
$\left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ -2x - 2y = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = -y \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$
Le point d'équilibre est (0,0)
$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

tr(A)=-2
det(A)=2
le point d'équilibre est donc stable.
$\Delta = -2^2 - 4 * 2 = -4 < 0$
le point d'équilibre est donc un foyer stable

(b)
$\lambda_1 = \frac{tr(A) - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2 - i\sqrt{4}}{2} = -1 - i$
$\lambda_2 = \frac{tr(A) + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2 + i\sqrt{4}}{2} = -1 + i$
Le calcule des vecteurs propres associés donne:
$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. On vérifie enfin que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

(c)
$e^{Jt} = e^{-1t} \begin{pmatrix} cos(-t) & -sin(t) \\ sin(t) & cos(-t) \end{pmatrix}$

(d)
$$e^{tA} = \mathbf{P}^{-1}e^{tJ}\mathbf{P}e^{-1t}\begin{pmatrix} cos(-t) - \frac{1}{2}sin(t) & -\frac{1}{2}sin(t) \\ -\frac{5}{2}sin(t) & cos(-t) + \frac{1}{2}sin(t) \end{pmatrix}$$

(e)
$x(t) = x_0(cos(-t) - \frac{1}{2}sin(t)) - y_0\frac{1}{2}sin(t)$
$y(t) = x_0(-\frac{5}{2}sin(t)) + y_0(cos(-t) + \frac{1}{2}sin(t))$