1 Résolution explicite des systèmes dynamiques planaires (Matrices de Jordan)

Énoncé

On considère (S) le sytème d'équation différentielles linéaires suivant:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = -2x \end{cases}$$

(a) Mettre (S) sous forme matricielle: $\dot{X} = AX$, avec $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.
(b) Rechercher le ou les point(s) d'équilibre de (S), et préciser nature et stabilité de chacun d'eux.
(c) mettre la matrice **A** (du système linéaire) sous forme de Jordan réelle. Donner la matrice de passage **P**, et effectuer le changement de base. On mettra **p** sous la forme suivante $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} & 1 \\ 2 & \end{pmatrix}$.
(d) Calculer l'exponentielle de tJ.
(e) en déduire l'exponentielle de tA.
(f) Donner la solution particulière de (S), pour le condition initiale $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

Correction

(a)
$\binom{\dot{x}}{\dot{y}} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \binom{x}{y}$ (b)
$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ 2x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 3x = y \\ x = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$
Le point d'équilibre est (0,0)

tr(A)=3
det(A)=2
le point d'équilibre est donc instable.
$\Delta = 3^2 - 4 * 2 = 1 > 0$
Le point d'équilibre est donc un noeud instable
(c)
$\lambda_1 = \frac{tr(A)-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3-\sqrt{1}}{2} = 1$
$\lambda_2 = \frac{tr(A)+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2$

Le calcule des vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2 conduit à $U_1 = \binom{1}{2}$ et $U_2 = \binom{1}{1}$. On a alors:
$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. On vérifie enfin que $\mathbf{J} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} =$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(d)

$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{1t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

(e)

$e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1} = \begin{pmatrix} e^{2t} - 2e^{t} & e^{t} - e^{2t} \\ 2(e^{2t} - 2e^{t}) & 2e^{t} - e^{2t} \end{pmatrix}$

(f)

$x(t) = x_0(e^{2t} - 2e^{t}) + y_0(e^{t} - e^{2t}) = e^{2t} - 2e^{t} + e^{t} - e^{2t} = -e^{t}$
$y(t) = 2x_0(e^{2t} - 2e^{t}) + y_0(2e^{t} - e^{2t}) = 2e^{2t} - 4e^{t} + 2e^{t} - e^{2t} = e^{2t} - 2e^{t}$