

Bio-Mathématiques et Modélisation

Contrôle Terminal - Session 1

Mardi 23 mai 2017 - Durée : 2h00

Ceci est une épreuve *individuelle*. Seules la calculatrice et une **feuille A4 recto-verso manuscrite originale** sont autorisées pendant l'épreuve. Sans préjuger des sanctions prises ultérieurement, toute tentative de copie pendant l'épreuve sera sanctionnée par la répartition des points de la plus mauvaise copie entre *le copieur* **et** *le copié*.

Vous veillerez par ailleurs à **soigner vos graphiques**.

Lisez bien l'énoncé jusqu'au bout, certaines questions sont indépendantes des précédentes.

Reportez ici votre numéro d'anonymat :

1 Dessine-moi un hibou

Il est conseillé de faire les deux parties dans l'ordre, mais elles peuvent être traitées indépendamment.

1.1 Étude de fonction

On considère la fonction réelle f de la variable réelle x et définie par :

$$f(x) = x\sqrt{1 - \frac{x^2}{2}}$$

1. Quel est le domaine de définition de f ?
2. Que valent $f(0)$, $f(-1)$ et $f(\sqrt{2})$?
3. Montrez que la dérivée de f vaut $f'(x) = \frac{1-x^2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}}$.
4. Montrez que f admet deux extrema dont vous préciserez les coordonnées.
5. Que vaut $\lim_{x \nearrow \sqrt{2}} f'(x)$?

Que pouvez-vous en déduire ?

6. Dressez le tableau de variation de f sur son domaine de définition.¹
7. Sur le graphe ci-après (page 3), colorez en vert la courbe représentative de $f(x)$.

1. On donne $\sqrt{2} \approx 1.414$

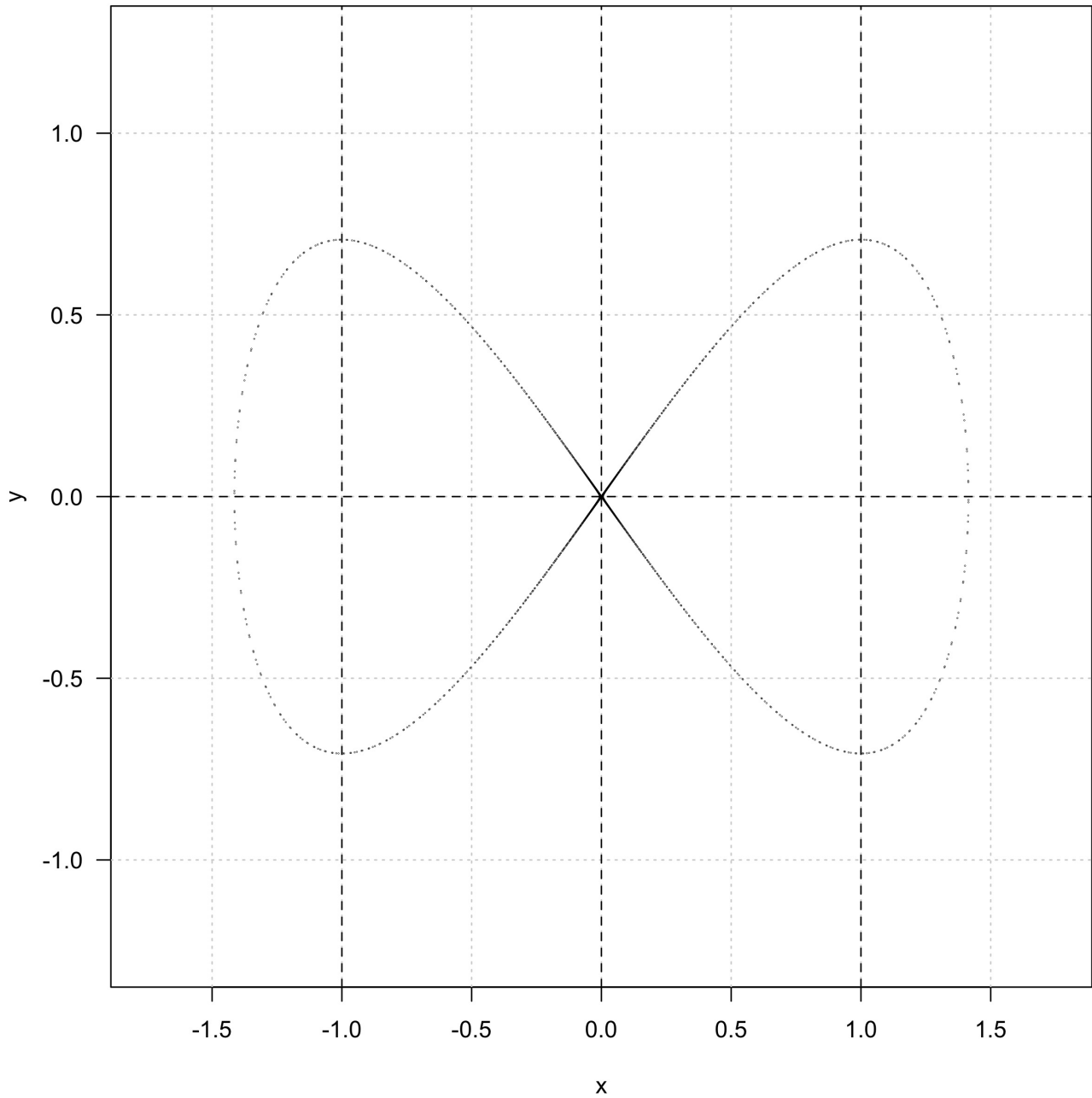
2 Portrait de phase

On considère maintenant le système dynamique défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x - x^3 \end{cases}$$

8. Déterminez les coordonnées des points d'équilibre. Positionnez-les, en noir, sur le graphe ci-après (page 3).
9. Calculez la matrice jacobienne du système.
10. En déduire la stabilité locale des points d'équilibre.
11. Montrez que la fonction $H(x, y) = 2x^2 - x^4 - 2y^2$ est une intégrale première pour le système.
12. Montrez que la courbe représentative de $H(x, y) = 0$ s'obtient par la réunion de deux courbes d'équation $y = \pm f(x)$.
13. Sur le graphe ci-après (page 3), complétez en vert pointillé la courbe représentative de $H(x, y) = 0$.
14. Donnez le développement en série de Taylor à l'ordre 2 de la fonction $H(x, y)$ au voisinage du point de coordonnées $(1, 0)$.
15. En déduire que la fonction $H(x, y)$ admet un extremum local au point de coordonnées $(1, 0)$ et que ses courbes de niveaux se referment localement autour de ce point. On admettra qu'il en est de même au point de coordonnées $(-1, 0)$.
16. Que pouvez-vous en conclure ?
17. Déterminez l'équation de l'isocline verticale dans le plan de phase (x, y) .
Vous la colorerez en rouge sur le graphe ci-après (page 3).
18. Déterminez l'équation des isoclines horizontales dans le plan de phase (x, y) .
Vous les colorerez en bleu sur le graphe ci-après (page 3).
19. Orientez les vecteurs vitesse. Justifiez.
20. Dessinez en noir et orientez les trajectoires correspondant aux conditions initiales suivantes :
 - $(0.25, 0)$, $(0.5, 0)$ et $(0.75, 0)$
 - $(-0.25, 0)$, $(-0.5, 0)$ et $(-0.75, 0)$
 - $(-1.75, 0)$ et $(-1.5, 0)$

Vous ajouterez une légende sous la figure pour la compléter.



Légende :

3 Mais qui est là ?

On considère le modèle de communauté suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 (41 - 0.1x_1 - 0.03x_2 - 2y_1) \\ \dot{x}_2 = x_2 (81 - 0.05x_1 - 0.1x_2 - y_2) \\ \dot{y}_1 = y_1 (-2 + 0.1x_1) \\ \dot{y}_2 = y_2 (-3 + 0.01x_2) \end{cases}$$

21. Identifiez les interactions écologiques en jeu et le rôle respectif des quatre espèces en présence. Justifiez.
22. Déterminez le point d'équilibre de coordonnées non nulles $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$.
23. Calculez la matrice jacobienne du système.
24. Complétez la matrice jacobienne au point d'équilibre précédent en calculant les valeurs de a_{21} et a_{33} :

$$\mathbf{J}^* = \begin{pmatrix} -2 & -0.6 & -40 & 0 \\ a_{21} & -30 & 0 & -300 \\ 1.5 & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

25. En déduire la matrice de communauté \mathbf{M} .
26. En déduire le graphe de communauté.
27. Les conditions de Quirck-Ruppert sont-elles vérifiées? Que pouvez-vous en conclure?
28. Le cas échéant, appliquez le test des couleurs. Que pouvez-vous en conclure?