N la taille de la pop. de la ruche

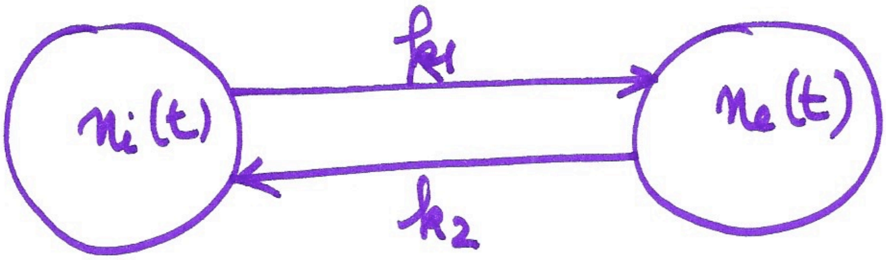
$n_i(t)$ à l'intérieur

$n_e(t)$ à l'extérieur

$$N = n_i(t) + n_e(t) = \text{cte}$$

① $\dfrac{dn_i}{dt} = -k_1 n_i + k_2 n_e$ $\qquad k_1, k_2 > 0$

a.



b. k_1 taux de sortie de l'intérieur vers l'extérieur
k_2 taux d'entrée depuis l'extérieur

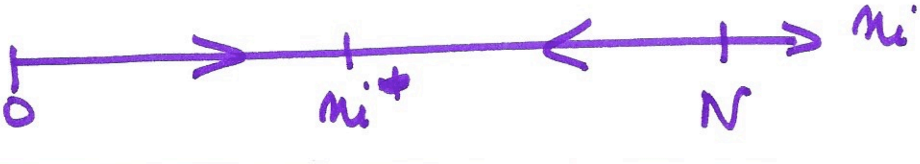
c. $n_e = N - n_i$

$$\frac{dn_i}{dt} = -k_1 n_i + k_2 (N - n_i)$$
$$= k_2 N - (k_1 + k_2) n_i$$

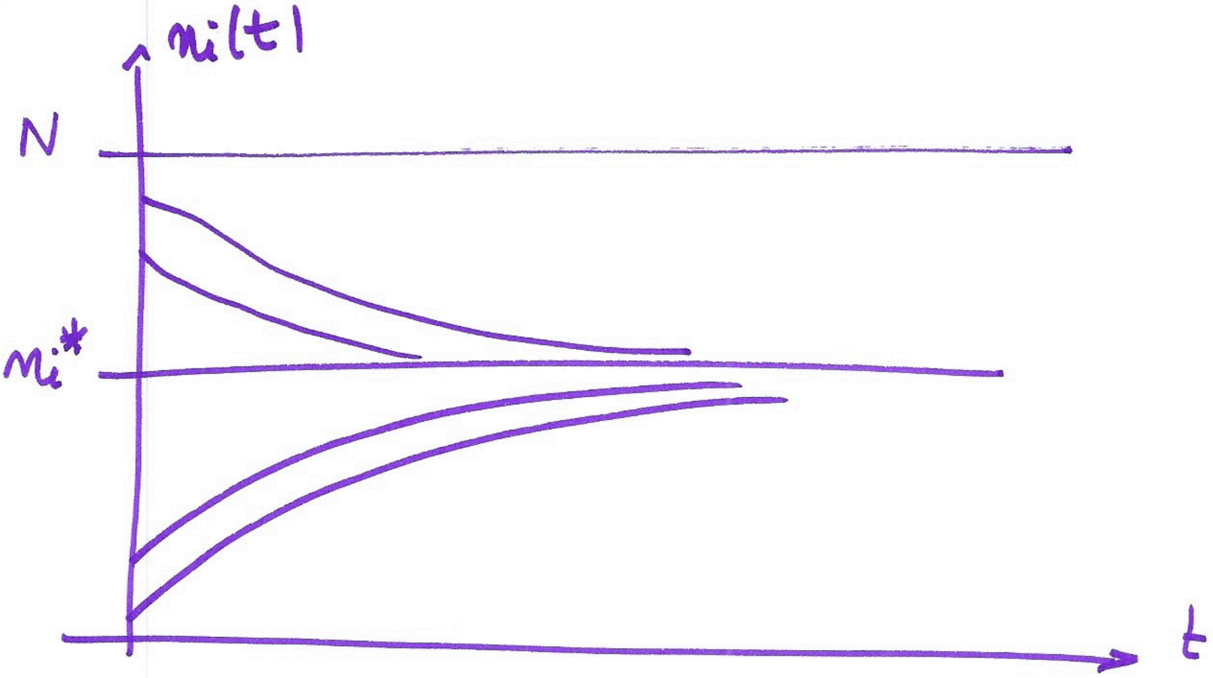
d. $\dfrac{dn_i}{dt} = 0 \iff n_i^* = \dfrac{k_2 N}{k_1 + k_2}$

e. $\dfrac{dn_i}{dt} > 0 \iff n_i < n_i^*$

Asymptotiquement stable



f.



Inflexion ?

$$\frac{dn_i}{dt} = f(n_i)$$

$$\frac{d^2 n_i}{dt^2} = \frac{df}{dn_i} \cdot \frac{dn_i}{dt} \rightarrow \frac{df}{dn_i} = -(k_1+k_2) < 0$$

pas de point d'inflexion

2 A l'extérieur une prop. $\frac{n_e}{n_e+a}$ abeilles s'égare

a. $$\frac{dn_e}{dt} = k_1 n_i - k_2 n_e \underbrace{\left(1 - \frac{n_e}{n_e+a}\right)}_{\text{prop. de celles qui reviennent sans s'être égarées.}}$$

$$\frac{dn_e}{dt} = k_1 (N - n_e) - k_2 n_e \left(1 - \frac{n_e}{n_e+a}\right)$$

$$\frac{dn_e}{dt} = k_1 N - k_1 n_e - k_2 n_e \left(1 - \frac{n_e}{n_e+a}\right)$$

b. $k_1 = k_2$

Alors $$\frac{dn_e}{dt} = k_1 N - k_1 n_e - k_1 n_e + k_1 \frac{n_e^2}{n_e+a}$$
$$= k_1\left(N - 2n_e + \frac{n_e^2}{n_e+a}\right).$$

$$\frac{dn_e}{dt} = 0 \iff N - 2n_e + \frac{n_e^2}{n_e+a} = 0.$$

$$\iff n_e^2 + (n_e+a)(N-2n_e) = 0.$$

$$\iff -n_e^2 + aN + (N-2a)n_e = 0.$$

$$\iff g(n_e) = 0$$

avec $g(x) = -x^2 + (N-2a)x + aN.$

c. $g(x) = 0 \iff -x^2 + (N-2a)x + aN = 0.$

$$\Delta = (N-2a)^2 + 4aN$$

$$\Delta = N^2 + 4a^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-N + 2a + \sqrt{N^2+4a^2}}{-2}$$

$$x_1 = \frac{N}{2} - a - \frac{1}{2}\sqrt{N^2+4a^2}$$

$$x_2 = \frac{N}{2} - a + \frac{1}{2}\sqrt{N^2+4a^2}$$

On veut $x > 0$ biologiquement.

et $x < N$

$x_1 > 0$? $\quad \frac{N}{2} - a > \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4a^2}$.

$$N - 2a > \sqrt{N^2 + 4a^2}$$

$$(N - 2a)^2 > N^2 + 4a^2$$

$$\cancel{N^2} - 4aN + \cancel{4a^2} > \cancel{N^2} + \cancel{4a^2}$$

$$-4aN > 0 \quad \underline{\text{non}}$$

donc $x_1 < 0$.

$x_2 > 0$?

$$\frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4a^2} > a - \frac{N}{2}$$

$$\sqrt{N^2 + 4a^2} > 2a - N$$

$$N^2 + 4a^2 > 4a^2 - 4aN + N^2$$

$$0 > -4aN \quad \underline{\text{oui}}.$$

donc $x_2 > 0$.

$x_2 < N$?

$$\frac{N}{2} - a + \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4a^2} < N$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4a^2} < a + N - \frac{N}{2}$$

$$\sqrt{N^2 + 4a^2} < 2a + N$$

$$N^2 + 4a^2 < (2a + N)^2$$

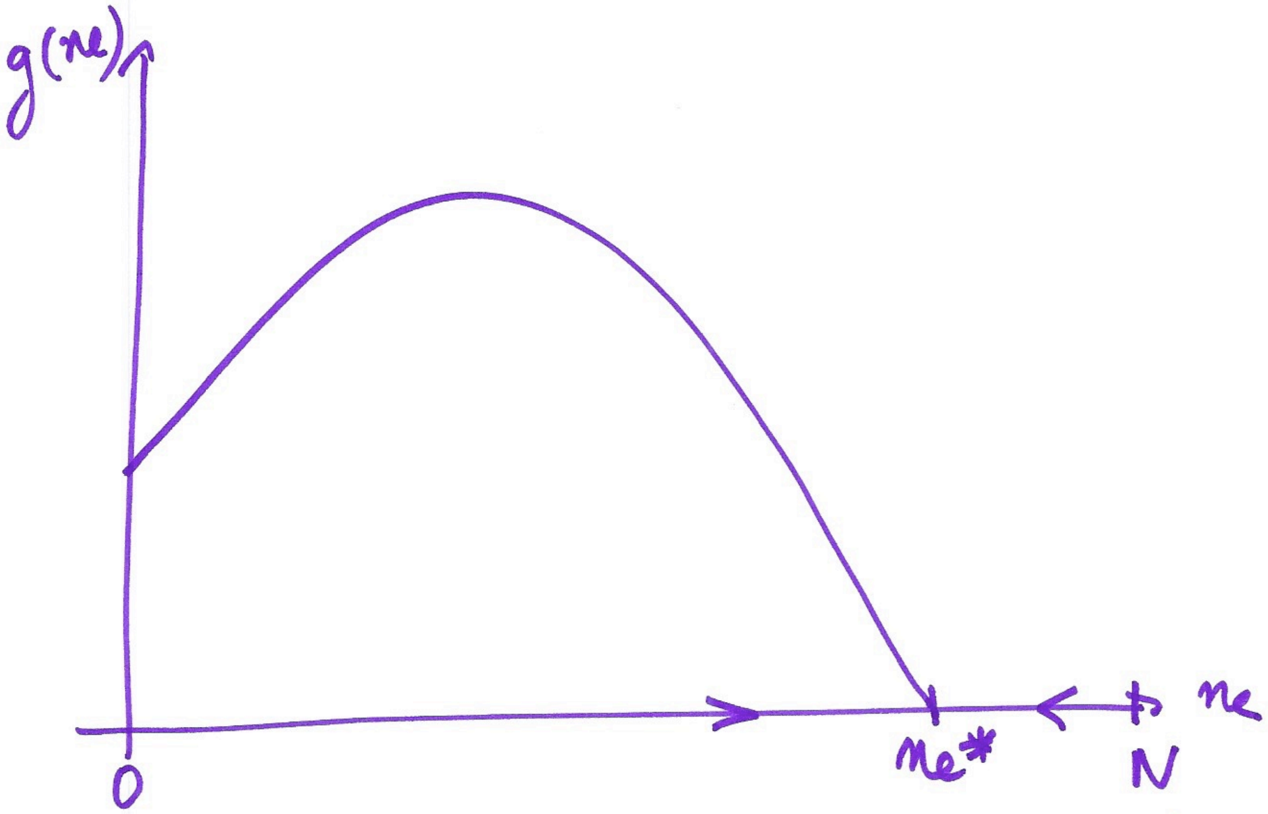
$$< 4a^2 + 4aN + N^2$$

$\underline{\text{oui}}$.

Donc 1 seul équilibre $n_e^* = \frac{N}{2} - a + \frac{1}{2}\sqrt{N^2 + 4a^2}$

(5

d. $g(x)$ polynome de degré 2
à 1^{er} coef. < 0
$\rightarrow$ parabole concave.
$g(0) = a N$



l'équilibre est asymptotiquement stable.