# MAB Modélisation - Contrôle continu

Durée : 3/4 heure

04/11/14

Pour approvisionner leur ruche, les abeilles doivent en permanence aller à la recherche de nectar à l'extérieur, et le ramener à la ruche.

Si on note $N$ la taille de la population d'une ruche, à tout instant $t$ elle se sépare en deux, $n_i(t)$ les abeilles à l'intérieur de la ruche, et $n_e(t)$ les abeilles à l'extérieur de la ruche : $N = n_e + n_i$. On suppoe que $N$ est constante.

1. On écrit $\frac{dn_i}{dt} = -k_1 n_i + k_2 n_e$ avec $k_1, k_2 > 0$.
   (a) Représenter schématiquement le système.
   (b) Interpréter biologiquement les constantes $k_1$ et $k_2$.
   (c) Justifier que l'équation en fonction de $n_i$ est :
   $$\frac{dn_i}{dt} = -(k_1 + k_2)n_i + k_2 N$$
   (d) Quel(s) est(sont) le(s) point(s) d'équilibre de cette équation?
   (e) Dessinez le portrait de phase.
   (f) Dessinez des chroniques de ce système.

2. En fait, à l'extérieur de la ruche, les abeilles peuvent subir l'influence d'un insecticide qui les désoriente temporairement, et retarde leur retour à la ruche. En outre les abeilles ont tendance à se suivre, si bien qu'une abeille désorientée va en entrainer d'autres avec elle.

   Ainsi, sur une population $n_e$ d'abeilles à l'extérieur, une proportion $\frac{n_e}{n_e+a}$ peut s'égarer temporairement.

   (a) Montrer que la dynamique des abeilles à l'extérieur satisfait :
   $$\frac{dn_e}{dt} = k_1 N - k_1 n_e - k_2 n_e (1 - \frac{n_e}{n_e + a})$$
   Dans la suite, on considérera que $k_1 = k_2$.
   (b) Montrer que tout point d'équilibre $n_e^\star$ annule le polynôme
   $$g(x) = -x^2 + (N - 2a)x + aN$$
   (c) Montrer qu'il n'existe qu'un seul point équilibre biologiquement réaliste.
   (d) Tracer $g(n_e)$ en fonction de $n_e$ et en déduire le portrait de phase.