S. Charles

CORRECTION

Des algues envahisseuses

Une piscine est infestée par des algues dont la densité est appelée $N(t)$. Le propriétaire tente alors d'enrayer l'infestation avec un produit chimique anti-algues, déversé dans la piscine avec un débit constant Q. En l'absence d'algues, le produit chimique disparaît naturellement ; quand les algues sont présentes, elles métabolisent le produit, qui les tue.

Les équations qui régissent l'évolution dans le temps de la densité d'algues $N(t)$ et de produit chimique $C(t)$ sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)C(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = Q - \alpha C(t) - \beta N(t)C(t) \end{array} \right.$$

où a, b, α, β et Q sont des paramètres tous strictement positifs.

Interprétation biologique

Question 1 Quel est le modèle sous-jacent à la croissance des algues ? ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

Le modèle de croissance exponentielle ou modèle de Malthus.

Question 2 Donnez une interprétation aux paramètres a, α et Q. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

- a : taux de croissance malthusien des algues ;
- α : taux de dégration du produit chimique (taux de décroissance exponentielle de la concentration en produit chimique) ;
- Q : Quantité de produit chimique déversée dans la piscine par unité de temps.

Question 3 Donnez une interprétation aux paramètres b et β. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

- b : taux de mortalité des algues sous l'action du produit chimique ;
- β : taux de métabolisation du produit chimique par les algues ;

Question 4 De quel type d'interaction s'agit-il ? ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

Il s'agit d'une interaction de type compétition.

Points d'équilibre et stabilité

On suppose dans la suite que $Q > \frac{\alpha a}{b}$.

Question 5 Montrez qu'il existe deux points d'équilibre $(0, C_1^\star)$ et $(N_2^\star, C_2^\star)$. Précisez les valeurs de $C_1^\star$, $N_2^\star$ et $C_2^\star$. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ■2

$\frac{dN}{dt} = 0$ si $N = 0$ ou $a - bC = 0$.

Si $N = 0$, alors $\frac{dC}{dt} = Q - \alpha C$ qui s'annule pour $C_1^\star = \frac{Q}{\alpha}$.

L'autre condition $a - bC = 0$ donne $C_2^\star = \frac{a}{b}$ qui annule $\frac{dN}{dt}$. En remplaçant C par l'expression de $C_2^\star$ dans $\frac{dC}{dt}$, on obtient :

$$\frac{dC}{dt} = Q - \frac{\alpha a}{b} - \frac{\beta a}{b}N = Q - \frac{a}{b}(\alpha + \beta N)$$

D'où $\frac{dC}{dt} = 0$ pour $N = \frac{b}{\beta a}(Q - \frac{\alpha a}{b})$. Ainsi, $N_2^\star = \frac{bQ}{\beta a} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta}(\frac{bQ}{a} - \alpha)$.

Puisque $Q > \frac{\alpha a}{b}$, on a bien $N_2^\star > 0$.