S. Charles

CORRECTION

Des algues envahisseuses

Une piscine est infestée par des algues dont la densité est appelée $N(t)$. Le propriétaire tente alors d'enrayer l'infestation avec un produit chimique anti-algues, déversé dans la piscine avec un débit constant Q. En l'absence d'algues, le produit chimique disparaît naturellement ; quand les algues sont présentes, elles métabolisent le produit, qui les tue.

Les équations qui régissent l'évolution dans le temps de la densité d'algues $N(t)$ et de produit chimique $C(t)$ sont les suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = aN(t) - bN(t)C(t) \\ \frac{dC(t)}{dt} = Q - \alpha C(t) - \beta N(t)C(t) \end{cases}$$

où a, b, α, β et Q sont des paramètres tous strictement positifs.

Interprétation biologique

Question 1 Quel est le modèle sous-jacent à la croissance des algues ? ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

Le modèle de croissance exponentielle ou modèle de Malthus.

Question 2 Donnez une interprétation aux paramètres a, α et Q. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

— a : taux de croissance malthusien des algues ;

— α : taux de dégration du produit chimique (taux de décroissance exponentielle de la concentration en produit chimique) ;

— Q : Quantité de produit chimique déversée dans la piscine par unité de temps.

Question 3 Donnez une interprétation aux paramètres b et β. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

— b : taux de mortalité des algues sous l'action du produit chimique ;

— β : taux de métabolisation du produit chimique par les algues ;

Question 4 De quel type d'interaction s'agit-il ?

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

Il s'agit d'une interaction de type compétition.

Points d'équilibre et stabilité

On suppose dans la suite que $Q > \frac{\alpha a}{b}$.

Question 5 Montrez qu'il existe deux points d'équilibre $(0, C_1^\star)$ et $(N_2^\star, C_2^\star)$. Précisez les valeurs de $C_1^\star$, $N_2^\star$ et $C_2^\star$.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ■2

$\frac{dN}{dt} = 0$ si $N = 0$ ou $a - bC = 0$.

Si $N = 0$, alors $\frac{dC}{dt} = Q - \alpha C$ qui s'annule pour $C_1^\star = \frac{Q}{\alpha}$.

L'autre condition $a - bC = 0$ donne $C_2^\star = \frac{a}{b}$ qui annule $\frac{dN}{dt}$. En remplaçant C par l'expression de $C_2^\star$ dans $\frac{dC}{dt}$, on obtient :

$$\frac{dC}{dt} = Q - \frac{\alpha a}{b} - \frac{\beta a}{b}N = Q - \frac{a}{b}(\alpha + \beta N)$$

D'où $\frac{dC}{dt} = 0$ pour $N = \frac{b}{\beta a}(Q - \frac{\alpha a}{b})$. Ainsi, $N_2^\star = \frac{bQ}{\beta a} - \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{\beta}(\frac{bQ}{a} - \alpha)$.

Puisque $Q > \frac{\alpha a}{b}$, on a bien $N_2^\star > 0$.

Question 6 Calculez la matrice Jacobienne du système. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} a - bC & -bN \\ -\beta C & -\alpha - \beta N \end{pmatrix}$$

Question 7 Donnez l'expression de la matrice Jacobienne au point d'équilibre $(0, C_1^\star)$. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

$$\mathbf{J_1} = \begin{pmatrix} a - \frac{bQ}{\alpha} & 0 \\ -\frac{\beta Q}{\alpha} & -\alpha \end{pmatrix}$$

Question 8 Précisez la nature et la stabilité du point d'équilibre $(0, C_1^\star)$. Justifiez. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

Puisque $Q > \frac{\alpha a}{b}$, $a - \frac{bQ}{\alpha} < 0$, donc $\mathbf{J_1}$ possède deux valeurs propres réelles négatives. Le point d'équilibre $(0, C_1^\star)$ est un noeud asymptotiquement stable.

Question 9 Montrez que la matrice jacobienne au point d'équilibre $(N_2^\star, C_2^\star)$ s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{J_2} = \begin{pmatrix} 0 & -bN_2^* \\ -\beta C_2^* & -\frac{Qb}{a} \end{pmatrix}$$

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

On utilise ici les conditions d'équilibre, c'est-à-dire les équations dont le point d'équilibre $(N_2^\star, C_2^\star)$ est solution, à savoir :
$a - bC = 0$ et $Q - \frac{a}{b}(\alpha + \beta N) = 0$
Ainsi, $\alpha + \beta N = \frac{Qb}{a}$.
Finalement, d'après l'expression de $\mathbf{J}$, on obtient bien :

$$\mathbf{J}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -bN_2^* \\ -\beta C_2^* & -\frac{Qb}{a} \end{pmatrix}$$

Question 10 Précisez la nature et la stabilité du point d'équilibre $(N_2^\star, C_2^\star)$. Justifiez.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ■1

On calcule asiément $\det \mathbf{J_2} = -\mathbf{b}\beta\mathbf{N_2^\star C_2^\star} < \mathbf{0}$. On en conclut que le point d'équilibre $(N_2^\star, C_2^\star)$ est un point selle.

Portrait de phase et trajectoires

Question 11 On choisit le plan de phase (N, C). Donnez l'équation de l'isocline horizontale. Justifiez.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

Les isoclines horizontales sont les courbes solution de l'équation $\dot{C} = 0$, soit :

$$C = \frac{Q}{\alpha + \beta N}$$

La courbe représentative est une branche d'hyperbole.

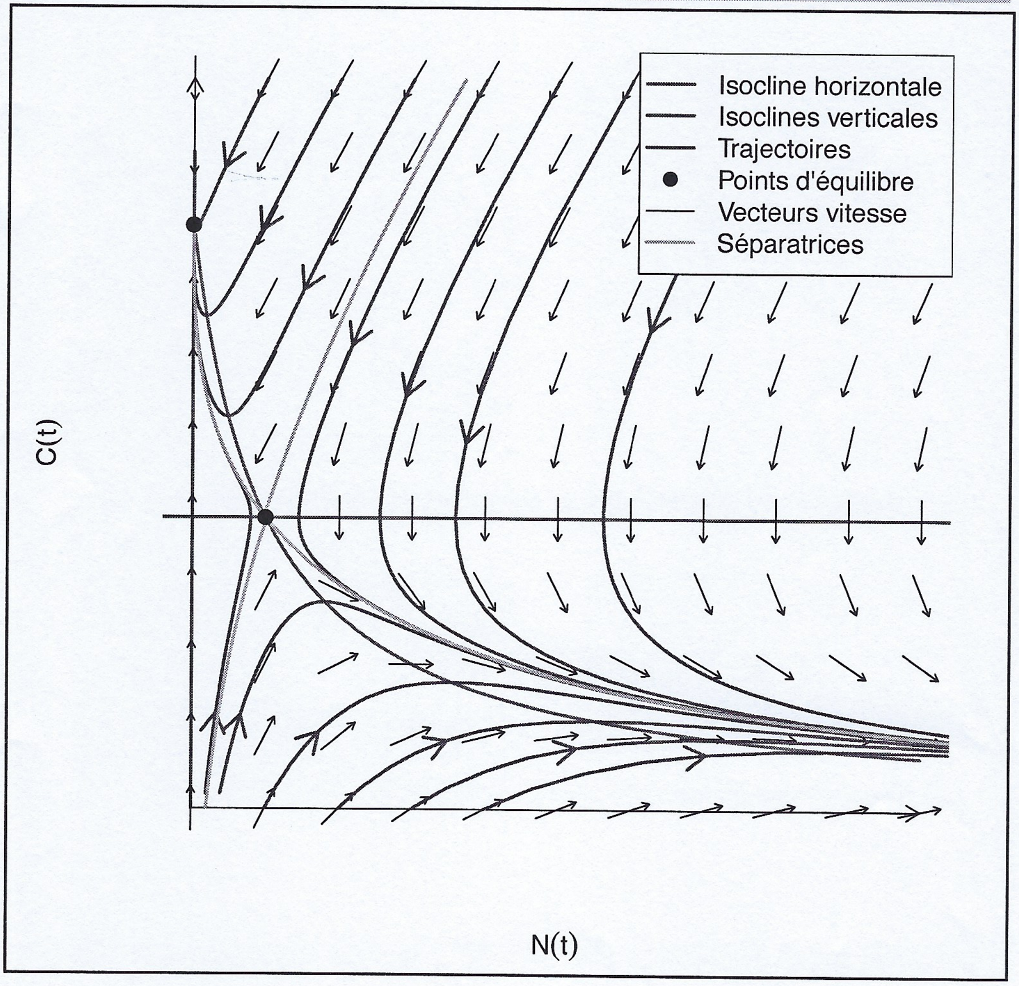
Question 12 Donnez l'équation des isoclines verticales. Justifiez. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

Les isoclines verticales sont les courbes solution de l'équation $\dot{N} = 0$, soit :

$$N = 0 \quad \text{ou} \quad C = \frac{a}{b}$$

Question 13 Sur le portrait de phase ci-dessous :
- Colorez de deux couleurs différentes les isoclines horizontales et verticales ;
- Positionnez les points d'équilibre ;
- Positionnez les vecteurs vitesse horizontaux et verticaux et indiquez leur sens ;
- Dessinez quelques trajectoires bien choisies.

N'oubliez pas d'indiquer la légende. ☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ☐$\frac{3}{2}$ ☐2 ☐$\frac{5}{2}$ ■3



Question 14 Les propositions suivantes sont-elles vérifiées ? Justifiez.
(a) Quelle que soit la condition initiale en produit chimique, les algues disparaissent.
(b) Si $C(0) > \frac{a}{b}$ et si $N(0) < \frac{1}{\beta}(\frac{bQ}{a} - \alpha)$, la population d'algues s'éteint mais les résidus de produit chimique restent présents dans la piscine.

☐0 ☐$\frac{1}{2}$ ☐1 ■$\frac{3}{2}$

(a) La réponse est **non**, en effet si par exemple $C(0) = 0$ et $N(0) > 0$, alors la population d'algues croît à l'infini.

(b) La réponse est **oui**, en effet si $C(0) > \frac{a}{b}$ et $N(0) < \frac{1}{\beta}(\frac{bQ}{a} - \alpha)$ cela signifie qu'on part d'une condition initiale à gauche de la séparatrice du point selle ; la trajectoire correspondante va converger vers le point d'équilibre $(0, \frac{Q}{\alpha})$, il y aura donc bien extinction des algues, avec des résidus chimiques qui restent présents dans la piscine en quantité égale à $\frac{Q}{\alpha}$).

→ Algues envahisseuses