

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(2-N) - \frac{PN}{1+N} \\ \frac{dP}{dt} = \frac{PN}{1+N} - \mu P \end{cases}$$

$$\boxed{0 < \mu < \frac{2}{3}}$$

$$(0,0) \quad (2,0) \quad (N^*, P^*)$$

↓
P.S.

↓
P.S.

$$N^* = \frac{\mu}{1-\mu}$$

$$P^* = \frac{2-3\mu}{(1-\mu)^2}$$

$$J^* = \begin{pmatrix} \mu(1-3\mu) & -\mu \\ 2-3\mu & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det J^* = \mu(2-3\mu) > 0$$

$$\text{tr } J^* = \mu(1-3\mu) > 0 \quad \text{si } \mu < 1/3$$

$$\Delta = \text{tr}^2 - 4 \det$$

$$= \mu^2(1-3\mu)^2 - 4\mu(2-3\mu)$$

$$= \mu \left[\mu(1-6\mu+9\mu^2) - 8 + 12\mu \right]$$

$$= \mu (\mu - 6\mu^2 + 9\mu^3 - 8 + 12\mu)$$

$$= \mu (9\mu^3 - 6\mu^2 + 13\mu - 8)$$

Posons $\Delta = \mu h(\mu)$ avec $h(\mu) = 9\mu^3 - 6\mu^2 + 13\mu - 8$

Étudions $h(\mu)$ sur $0 < \mu < 2/3$

$$h(0) = -8 \quad h(2/3) = 2/3$$

$$\frac{dh}{d\mu} = 27\mu^2 - 12\mu + 13 > 0$$

$$\Delta' = 144 - 1404 < 0 \rightarrow \text{pas de racine réelle}$$

→ donc $h(\mu)$ est $\nearrow$ sur $0 < \mu < 2/3$

$h(0) < 0$ $h(2/3) > 0$ Thm des val. intermédiaires ⁽²⁾
 $\exists \alpha \in]0; 2/3[$ tq $h(\alpha) = 0$.

Donc $\Delta < 0$ si $0 < \mu < \alpha$

et on a alors des val. pr. complexes conjuguées pour J^*

$$d_{1,2} = \frac{\text{tr} J^*}{2} \pm i \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

$\text{Re}(d_i) = \frac{\mu}{2}(1-3\mu)$ $\text{Re}(d_i) = 0 \Leftrightarrow \mu = 1/3$
 val. de bifurcation

$$\frac{d\text{Re}(d_i)}{d\mu} = \frac{1}{2}(1-6\mu)$$

$$\left. \frac{d\text{Re}(d_i)}{d\mu} \right|_{\mu=1/3} = -1 \neq 0$$

$$\left. \text{Im}(d_i) \right|_{\mu=1/3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \neq 0$$

Donc pr $0 < \mu < \alpha$, les cond^o d'appli^o du thm. de Poincaré-Floquet sont vérifiées

Reste à déterminer la stabilité de (N^*, P^*) lorsque $\mu = 1/3$ pr identifier de quelle bifurcation il s'agit.

On ne peut pas utiliser la jacobienne dont la trace vaut 0

ou $\begin{cases} \rightarrow \text{Lyapunov} \\ \rightarrow \text{Indice de Poincaré-McCracken.} \end{cases}$

soit $\mu = 1/3$

(3)

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = N(2-N) - \frac{PN}{1+N} \\ \frac{dP}{dt} = \frac{PN}{1+N} - \frac{P}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (N^*, P^*) &= \left(\frac{1/3}{1-1/3}, \frac{2-3/3}{(1-1/3)^2} \right) \\ &= \left(\frac{1/3}{2/3}, \frac{1}{(2/3)^2} \right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4} \right) \end{aligned}$$

On ramène d'abord le point d'équilibre à l'origine

$$\begin{cases} u = N - \frac{1}{2} \\ v = P - \frac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} N = u + \frac{1}{2} \\ P = v + \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{dN}{dt} = \left(u + \frac{1}{2}\right)\left(2 - u - \frac{1}{2}\right) - \frac{\left(u + \frac{1}{2}\right)\left(v + \frac{9}{4}\right)}{u + \frac{3}{2}}$$

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = \left(u + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} - u\right) - \frac{\left(u + \frac{1}{2}\right)\left(v + \frac{9}{4}\right)}{u + \frac{3}{2}} \\ \frac{dv}{dt} = \frac{\left(u + \frac{1}{2}\right)\left(v + \frac{9}{4}\right)}{u + \frac{3}{2}} - \frac{v + \frac{9}{4}}{3} \end{cases}$$

On vérifie que si $u = v = 0$, les dérivées s'annulent:

$$\left. \frac{du}{dt} \right|_{u,v=0} = \frac{3}{4} - \frac{9/8}{3/2} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \quad \square$$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{u,v=0} = \frac{3/4 - 3/4}{3} = 0 \quad \square \quad \text{OK}$$

Il faut mettre la matrice jacobienne au point origine et vérifier qu'elle est bien sous sa forme de Jordan.

$$\frac{du}{dt} = \frac{3}{4} + u - u^2 - \left(\frac{u+1/2}{u+3/2} \right) \left(v + \frac{9}{4} \right) \quad (4)$$

$$= f(u, v)$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = +1 - 2u - \left(v + \frac{9}{4} \right) \frac{u+3/2 - (u+1/2)}{(u+3/2)^2}$$

$$= +1 - 2u - \frac{(v+9/4)}{(u+3/2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = - \left(\frac{u+1/2}{u+3/2} \right)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{(0,0)} = +1 - \frac{9/4}{9/4} = 0$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{(0,0)} = - \frac{1/2}{3/2} = -1/3$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{(u+1/2)(v+9/4)}{u+3/2} - v/3 - 3/4$$

$$\frac{dv}{dt} = -3/4 - v/3 + (v+9/4) \left(\frac{u+1/2}{u+3/2} \right)$$

$$= g(u, v)$$

$$\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{(v+9/4)}{(u+3/2)^2} \quad \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{(0,0)} = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = -1/3 + \left(\frac{u+1/2}{u+3/2} \right) \cdot \left. \frac{\partial g}{\partial v} \right|_{(0,0)} = -1/3 + 1/3 = 0$$

finalement, $A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (5)

On doit donc maintenant changer de base pour mettre $A_{(0,0)}$ sous la forme de Jordan $\begin{pmatrix} 0 & \omega^* \\ -\omega^* & 0 \end{pmatrix}$.

Avec $\mu = 1/3$, la val. pr pour $\lambda_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$ soit $\omega^* = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Cherchons les vect. propres

$$\lambda_1 = +\frac{i}{\sqrt{3}} \quad V_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$AV_1 = \lambda_1 V_1 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{i}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$a = \frac{i}{\sqrt{3}} b \quad \text{si } b = \sqrt{3}, \quad a = i$$

$$V_1^* = \begin{pmatrix} i \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On prend $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \quad P^{-1} = \frac{-1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P^{-1} A_{(0,0)} P = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

□!

Du coup, il reste à faire un dernier changement de variable

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

et donc on a réécrit le système en (u, v) pour les variables (x, y) .

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(6)

$$\begin{cases} u = y \\ v = \sqrt{3}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = u \\ x = v/\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{dv}{dt} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\left(-\frac{3}{4} - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) + \left(\sqrt{3}x + \frac{9}{4} \right) \left(\frac{y+1/2}{y+3/2} \right) \right] \\ \rightarrow \frac{dx}{dt} &= -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{x}{3} + \left(x + \frac{3\sqrt{3}}{4} \right) \left(\frac{y+1/2}{y+3/2} \right) \\ \rightarrow \frac{dy}{dt} &= \frac{du}{dt} = +\frac{3}{4} + y - y^2 - \left(\sqrt{3}x + \frac{9}{4} \right) \left(\frac{y+1/2}{y+3/2} \right) \end{aligned}$$

On a donc les fonctions $f(x,y)$ et $g(x,y)$
pour calculer l'indice de Poincaré-Andronov-Cracken.
pour $(x^*, y^*) = (0, 0)$.

Vérifions que si $x = y = 0$, les dérivées s'annulent:

$$\left. \frac{dx}{dt} \right|_{(0,0)} = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1/2}{3/2} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = 0 \quad \underline{\text{OK.}}$$

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{(0,0)} = \frac{3}{4} - \frac{9}{4} \left(\frac{1/2}{3/2} \right) = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = 0 \quad \underline{\text{OK.}}$$

Si on cherchait la jacobienne en $(0,0)$ on
aurait nécessairement $\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.

$$f(x, y) = -\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{x}{3} + \left(x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \left(\frac{y+1/2}{y+3/2}\right) \quad (7)$$

$$f_x = -\frac{1}{3} + \left(\frac{y+1/2}{y+3/2}\right)$$

$$f_{xx} = f_{xxx} = 0$$

$$f_{xy} = \frac{y+3/2 - (y+1/2)}{(y+3/2)^2} = \frac{1}{(y+3/2)^2}$$

$$f_{xyy} = \frac{-2}{(y+3/2)^3}$$

$$f_y = \left(x + \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \frac{1}{(y+3/2)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{-2(x + 3\sqrt{3}/4)}{(y+3/2)^3}$$

$$g(x, y) = \frac{3}{4} + y - y^2 - \left(\sqrt{3}x + \frac{9}{4}\right) \left(\frac{y+1/2}{y+3/2}\right)$$

$$g_x = -\sqrt{3} \left(\frac{y+1/2}{y+3/2}\right)$$

$$g_{xx} = 0 = g_{xxy}$$

$$g_{xy} = \frac{-\sqrt{3}}{(y+3/2)^2}$$

$$g_y = 1 - 2y - \frac{(\sqrt{3}x + 9/4)}{(y+3/2)^2}$$

$$g_{yy} = \frac{2(\sqrt{3}x + 9/4)}{(y+3/2)^3}$$

$$g_{yyy} = \frac{-6(\sqrt{3}x + 9/4)}{(y+3/2)^4}$$

Calcul des dérivées en $(0, 0)$:

$$f_{xx} = f_{xxx} = 0$$

$$f_{xy} = 4/9$$

$$f_{xyy} = \frac{-2}{27/8} = -16/27$$

$$f_{yy} = \frac{-3\sqrt{3}/2}{9/4} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} = -2/\sqrt{3}$$

$$g_{xx} = g_{xy} = 0$$

$$g_{xy} = \frac{-\sqrt{3}}{9/4} = -\frac{4\sqrt{3}}{9} = -4/3\sqrt{3}$$

$$g_{yy} = \frac{9/2}{27/8} = 4/3$$

$$g_{yyy} = \frac{-6 \times 9/4}{243/16} = -\frac{27/2}{243/16} = -8/9$$

Finalement, on obtient:

$$I = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[-\frac{16}{27} - \frac{8}{9} \right] - \frac{4}{9} \left(-\frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \frac{4}{3\sqrt{3}} \left(\frac{4}{3} \right) + \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{4}{3}$$

$$= -\frac{31}{9\sqrt{3}} + \frac{8}{9\sqrt{3}} - \frac{12}{9\sqrt{3}} + \frac{8}{3\sqrt{3}} \times \frac{3}{3}$$

$$I = \frac{-31+8-12+24}{9\sqrt{3}} = -\frac{11}{9\sqrt{3}} < 0$$

On peut donc en conclure qu'à la bifurcation ($\mu^* = 1/3$), notre point d'équilibre est localement asymptotiquement stable.

Par conséquent, d'après le thm de P. A. H., on en conclut que l'on a une bif^o de Hopf super-critique !

af---