4BIM – TD1

1. Illustration des théorèmes de stabilité d'un point fixe

Exemple : Soit $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n$.

2. Un modèle récurrent pour la médecine

On considère le cas d'un médicament administré par injection toutes les quatre heures selon une certaine dose. On note D_n la quantité de médicament dans le sang après la $n^{\text{ième}}$ injection.

Le corps élimine une certaine fraction p ($p \in]0;1[$) de médicament à chaque intervalle de temps (*i.e.*, entre chaque injection). Si la quantité de médicament administrée à chaque dose est q, déterminer D_n ainsi que $\lim\limits_{n \to +\infty} D_n$.

Remarque : Vous utiliserez deux méthodes de résolution.

3. Un modèle récurrent de dynamique de population

Considérons l'équation récurrente suivante :

$$(E_1) \quad x_{n+1} = \frac{2x_n}{1 + x_n}$$

→ T.S.V.P.

4. Dynamique de population d'insectes

8.1 Enoncé

Le modèle de Hassel *et al.* (1976)[2] a été proposé pour représenter la dynamique de populations d'insectes adultes d'une année t à la suivante $t+1$:

$N_{t+1} = \lambda N_t (1 + \alpha N_t)^{-b}$

avec $\lambda, \alpha, b > 0$. On supposera également que $b > 1$.

Ce modèle permet de décrire de façon empirique la croissance d'une population d'insectes limitée par la densité. λ est le taux d'accroissement de la population, α et b sont des paramètres qui régissent la dépendance à la densité.

1. Déterminer les points fixes de cette équation. Préciser éventuellement des conditions sur les paramètres permettant de donner un sens biologique à ces points fixes.
2. Déterminer à quelle(s) condition(s) sur les paramètres, les points fixes sont asymptotiquement stables.
3. On veut représenter ces conditions de stabilité dans le plan (b, λ). Tracer les courbes représentatives des fonctions suivantes :

   $f_1(b) = \left(\frac{b}{b-1}\right)^b$

   $f_2(b) = \left(\frac{b}{b-2}\right)^b$

   Hachurer la zone de stabilité du point fixe non trivial ainsi que la zone du plan correspondant à des oscillations amorties.
4. Hassell *et al.* (1976) donnent des estimations des paramètres b et λ pour plusieurs espèces d'insectes (Table 11). La table complète des valeurs est fournie en annexe A.

   Positionner ces points dans le plan précédent, et déterminer lesquelles de ces espèces auront des niveaux de population d'équilibre stables.

2. Hassell MP, Lawton JH, May RM. 1976. Patterns of dynamical behavior in single species populations. *Journal of Animal Ecology*, **45** :471–486. `http://genie1.ma.utexas.edu/users/davis/375/LECTURES/L7/hassel2.pdf`

→ T.S.V.P.

TABLE 1 – Estimation des paramètres b et λ pour quelques espèces d'insectes. Extrait de Hassel *et al.* (1976)

Espèce	b	λ
Punaise *Leptoterna dolobrata*	2.1	2.2
Moustique *Aedes aegypti*	1.9	10.6
Scarabée *Leptinotarsa decemlineata*	3.4	75.0

5. Dans un plan (x, y), tracer la fonction $f(x) = 3x(1+x)^{-4}$ pour $x > 0$, et l'utiliser pour construire graphiquement la suite $n_{t+1} = f(n_t)$ avec $n_0 = 0.1$.

→ T.S.V.P.