

4BIM – TD2

1. La suite de Fibonacci

Supposons que tout couple de lapins se reproduit quand les lapins sont âgés de 2 mois, et que chaque fois la reproduction donne lieu à 1 couple de lapins. On suppose également que tous les lapins survivent. En partant d'un couple de lapins âgés de 1 mois à $n = 0$, combien y aura-t-il de couples d'adultes à la $n^{\text{ième}}$ génération ?

2. Propagation d'une plante annuelle

L'objectif ici est de développer un modèle mathématique qui permette de connaître le nombre de plantes à une génération n quelconque.

Les plantes produisent des graines à la fin de leur période de croissance, lorsqu'elles arrivent à maturité (**en août** généralement) ; après quoi elles meurent. Seule une fraction de ces graines passe l'hiver, et celles qui survivent germent au début de la saison **en mai** pour donner naissance à une nouvelle génération de plante. Certaines graines peuvent ne germer que l'année suivante ; on distingue donc les graines d'une année et les graines de deux années.

On désigne par :

- γ , le nombre de graines produites par plante en août ;
- α , la fraction de graines d'une année qui germent en mai ;
- β , la fraction de graines de deux années qui germent en mai ;
- σ , la fraction de graines qui passe un hiver.

L'ensemble du processus peut se schématiser comme sur la Figure 14.

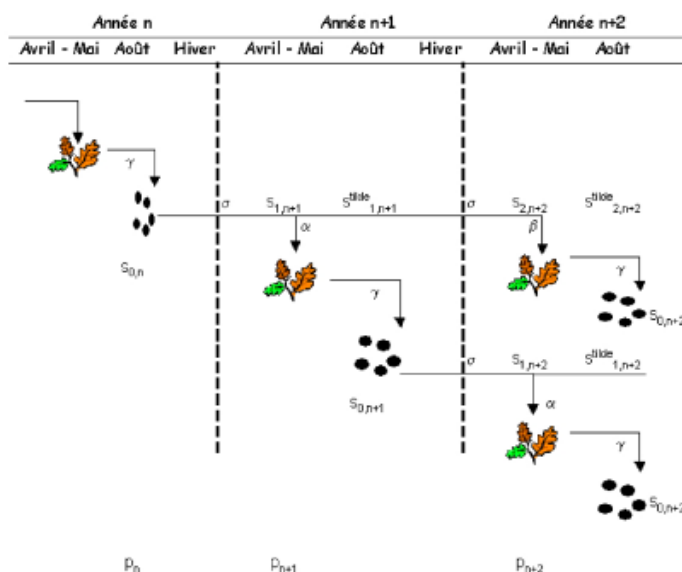


FIGURE 14 – Schéma fonctionnel de la propagation d'une plante annuelle.

3. Le modèle de Nicholson-Bailey

Le premier modèle d'interaction hôte-parasitoïde³ a été développé, sur des bases théoriques, conjointement par le biologiste entomologiste Alexander John Nicholson et le physicien Victor Albert Bailey en 1935. Le modèle est déterministe et repose sur les hypothèses suivantes :

1. En l'absence du parasitoïde, la population hôte se développe selon une croissance de type exponentiel, c'est-à-dire que la croissance de la population hôte est seulement limitée par la présence des parasitoïdes (paramètre R) ;
2. Le nombre d'attaques par parasitoïde dans la population (c'est-à-dire la *réponse fonctionnelle*) est proportionnel au nombre d'hôtes avec un coefficient de proportionnalité a qui représente l'efficacité de la recherche d'un hôte par un parasitoïde et donnant lieu à infection.

Le paramètre a est supposé constant, c'est-à-dire indépendant du nombre d'hôtes (capacité limite infinie - croissance exponentielle au taux R) et indépendant du nombre de parasitoïdes (pas de compétition et pas d'évitement d'un hôte déjà infecté).

Soit X la variable aléatoire du nombre d'attaques par parasitoïde sur 1 hôte. Le nombre total d'attaques dans la population sera donc aH_tP_t , avec aH_t le nombre d'attaques par parasitoïde. On peut alors modéliser X par une loi binomiale :

$$X \sim \mathcal{B}\left(aH_tP_t, \frac{1}{H_t}\right)$$

Si on suppose une répartition spatiale aléatoire des attaques sur les H_t hôtes, alors $1/H_t$ est la probabilité d'attaque d'un hôte.

Il est raisonnable de considérer que H_t et P_t sont grands, donc que aH_tP_t est grand et que $1/H_t$ est petit. Ainsi, on peut faire l'approximation de la loi binomiale par une loi de

3. Nicholson AJ, Bailey VA. 1935. The balance of animal populations. *Proc. Zool. Soc. Lond.* 3 :551-598.

Poisson de paramètre $\mu = aH_tP_t \times \frac{1}{H_t} = aP_t$:

$$X \sim \mathcal{P}(aP_t)$$

Il découle de la loi de Poisson que :

$$p(X = k) = \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!}$$

Ainsi, la fraction d'hôtes non parasités $f(H_t, P_t)$ est $p(X = 0)$, c'est-à-dire :

$$f(H_t, P_t) = e^{-\mu} = e^{-aP_t}$$

La fonction $f(H_t, P_t)$ ne dépend pas du nombre d'hôtes (Figure 5).

Finalement, le modèle de Nicholson-Bailey s'écrit :

$$\begin{cases} H_{t+1} = RH_t e^{-aP_t} \\ P_{t+1} = cH_t (1 - e^{-aP_t}) \end{cases}$$

4. Interaction plantes-herbivores

On considère ici des herbivores se nourrissent de plantes dont ils consomment une partie de la biomasse. Malgré la prédation, les dégâts ou la consommation infligés par l'herbivore, communément appelés **herbivorie**, ne conduisent pas à la mort de la plante hôte. Par contre, les herbivores peuvent réduire la biomasse de la végétation qu'ils consomment, causant alors potentiellement d'autres changements qualitatifs chez la plante. Dans un premier essai pour modéliser les interactions plantes-herbivores, nous nous contenterons de changements quantitatifs, c'est-à-dire de changements de la biomasse de la population des plantes.

Considérons les hypothèses suivantes :

- Les herbivores ont des générations discrètes qui correspondent à la saisonnalité de la végétation ;
- La disponibilité de la végétation et la densité de population des herbivores sont les principaux facteurs qui déterminent la fécondité et la survie des herbivores ;
- L'abondance de la végétation dépend d'une part de l'ampleur de l'herbivorie à laquelle sont soumises les plantes à la saison précédente, d'autre part de la biomasse précédente de la végétation. On se place ici en *pre-breeding census*.

Considérons les deux variables suivantes :

v_n = la biomasse végétale à la génération n ;

h_n = le nombre d'herbivores à la génération n .

On peut écrire le modèle suivant :

$$\begin{cases} v_{n+1} = f v_n e^{-a h_n} \\ h_{n+1} = r h_n \left(\delta - \frac{h_n}{v_n} \right) \end{cases}$$

où les paramètres f, a, r, δ sont des constantes strictement positives.

Le paramètre f représente le taux d'accroissement de la population de plantes ; la croissance est supposée exponentielle en l'absence d'herbivores.

Les herbivores suivent un modèle de croissance logistique de paramètre $r\delta$ (taux de croissance intrinsèque) et de capacité limite δh_n , donc une capacité limite dépendante de la ressource (biomasse de plantes).

1. Trouver les points fixes (\bar{v}, \bar{h}) du système. Que se passe-t-il si $f = 1$? Quelles relations doivent vérifier les paramètres pour que le point fixe existe biologiquement ?
2. Montrer qu'en normalisant les équations, il est possible de réduire le nombre de paramètres. Pour cela, définir $V_n = v_n/\bar{v}$ et $H_n = h_n/\bar{h}$. Montrer alors que le système peut être ré-écrit sous la forme :

$$\begin{cases} V_{n+1} = V_n e^{k(1-H_n)} \\ H_{n+1} = b H_n \left(1 + \frac{1}{b} - \frac{H_n}{V_n} \right) \end{cases}$$

Donner les expressions de b, k en fonction de f, a, r, δ .

3. Montrer que le système précédent possède un point fixe $V^* = H^* = 1$.
4. Etudier la stabilité locale du point fixe $V^* = H^* = 1$.