

Biomathématiques 1

Modélisation par EDO en Science la Vie

Modèles dans $\mathbb{R}^2$

Sandrine CHARLES & Laurent PUJO MENJOUET

sandrine.charles@univ-lyon1.fr

pujo@math.univ-lyon1.fr

D'après un document de Sylvain MOUSSET

-

Université Claude Bernard Lyon 1 – France

13 décembre 2020

Plan détaillé

$$(S) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \underline{f(x, y)} \\ \frac{dy}{dt} = \underline{g(x, y)} \end{cases}$$

$$(x^*, y^*) \leftarrow$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 0 \\ \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$$

linéarisation
 $\mathcal{V}(x^*, y^*)$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(x^*, y^*)}$$

Étude qualitative des systèmes non linéaires dans $\mathbb{R}^2$

Retour au modèle de Lotka-Volterra

Isoclines et points d'équilibre

Stabilité des points d'équilibre

Jacobienne d'un système quelconque

Théorème de linéarisation

→ Reprise au 26-01-2021

Théorème de linéarisation

Soit un système non linéaire $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$ admettant un point d'équilibre (x^*, y^*) et tel que $\det(\mathbf{M}^*) \neq 0$, où $\mathbf{M}^*$ est la matrice Jacobienne du système au voisinage du point (x^*, y^*) .

Alors, dans le voisinage du point d'équilibre, les portraits de phase du système $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$ et de sa forme linéarisée $\frac{d\mathbf{U}}{dt} = \mathbf{M}^* \mathbf{U}$ ont des points d'équilibre de même nature, sous réserve que le système linéarisé ne corresponde pas à des centres.

9/10

$\downarrow$
 $\det \mathbf{M}^* = 0 \rightarrow$ la linéarisation ne peut pas conclure sur la nature des centres.

Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_0)

Cas où il existe **trois points d'équilibre** (cas $\mu/\beta < K$).

La matrice Jacobienne du système est :

$$M = \begin{pmatrix} r - \alpha P - \frac{2rN}{K} & -\alpha N \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{dN}{dt} = rN(1 - \frac{N}{K}) - \alpha NP \\ \frac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0, 0 \\ K, 0 \\ (N^*, P^*) \end{pmatrix}$$

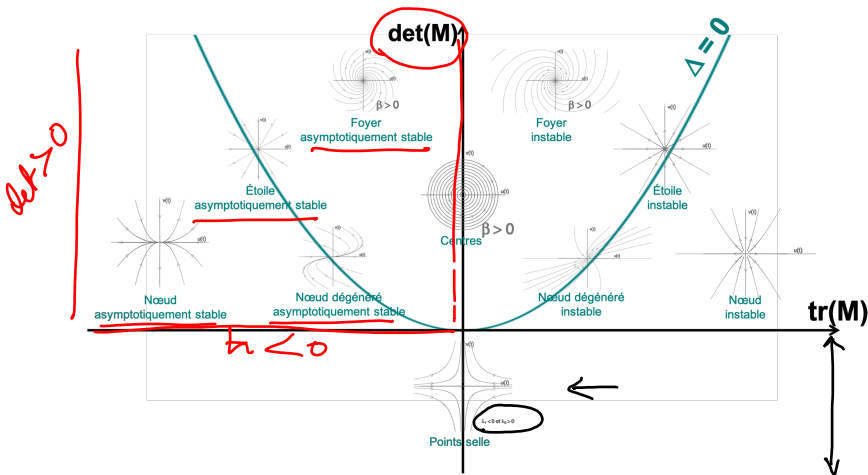
Au point d'équilibre $A_0 = (0, 0)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \downarrow & \ominus \\ 0 & \uparrow \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \downarrow & 0 \\ \ominus & \uparrow \end{pmatrix} \quad M_{A_0} = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \lambda_1 = r > 0 \\ \lambda_2 = -\mu < 0 \end{matrix} \in \mathbb{R}$$

On a $\det(M_{A_0}) = -r\mu < 0$.

Donc le point d'équilibre $A_0 = (0, 0)$ est un **point selle**.

local, non lin
 correspond à un P.S.



<https://lc.cx/pcbL>

Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_1) dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $A_1 = (K, 0)$, la matrice Jacobienne s'écrit :

$$\rightarrow M_{A_1} = \begin{pmatrix} -r & -\alpha K \\ 0 & \beta K - \mu \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 = -r < 0 \\ \lambda_2 = \beta K - \mu > 0 \\ \in \mathbb{R} \end{array}$$

On a $\det(M_{A_1}) = -r(\beta K - \mu) < 0$ (car $\beta K > \mu$).

Donc le point d'équilibre $A_1 = (K, 0)$ est un **point selle**.

Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_2) dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $A_2 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(K - \frac{\mu}{\beta})}{\alpha K} \right)$, les calculs se compliquent...
 Il faut se rappeler que les points d'équilibre sont à l'intersection des isoclines horizontales et verticales.

Ainsi pour A_2 :

$$\begin{aligned} \text{isocline } H &\rightarrow N = \frac{\mu}{\beta} \\ \text{isocline } V &\rightarrow P = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{N}{K} \right) \end{aligned}$$

On appelle ces équations les conditions d'équilibre.

Handwritten notes and equations:

- A circle containing N^* and P^* with an arrow pointing to $M \dots$
- Equation: $N^* = \frac{\mu}{\beta}$
- Equation: $P^* = \frac{r}{\alpha} \left(1 - \frac{N^*}{K} \right)$
- An arrow points from the circle to the text "conditions d'équilibre".
- An arrow points from the text "conditions d'équilibre" to M^* .

Le modèle de Lotka-Volterra

Théorème de linéarisation (A_2) dans le cas où $\mu/\beta < K$

Au point d'équilibre $A_2 = \left(\frac{\mu}{\beta}, \frac{r(K - \frac{\mu}{\beta})}{\alpha K} \right)$, la matrice Jacobienne s'écrit donc :

$$M_{A_2} = \begin{pmatrix} -r \frac{N^*}{K} & -\alpha N^* \\ \beta P^* & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \begin{matrix} d_1 d_2 = \det \\ d_1 + d_2 = \text{tr} \end{matrix}$$

On a $\det(M_{A_2}) = \alpha\beta N^* P^* > 0$ et $\text{tr}(M_{A_2}) = -r \frac{N^*}{K} < 0$.

Donc le point d'équilibre A_2 est un nœud, un nœud dégénéré, ou un foyer asymptotiquement stable selon le signe de :

$$\begin{aligned} \Delta &= r^2 \frac{N^{*2}}{K^2} - 4\alpha\beta N^* P^* \\ &= \frac{r^2 \mu^2}{\beta^2 K^2} - 4\alpha\mu P^* \dots \end{aligned} \quad \Delta = \text{tr}(M_{A_2})^2 - 4\det(M_{A_2})$$

Le modèle de Lotka-Volterra

Portrait de phase dans le cas où $\mu/\beta < K$

