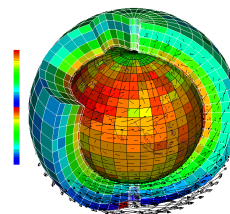
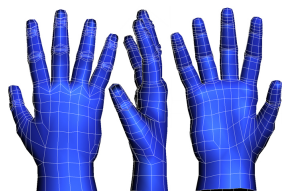


Mathématiques pour les Sciences de la Vie

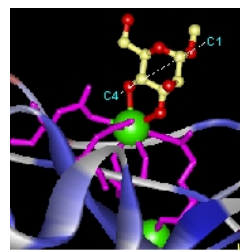
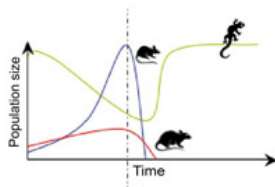
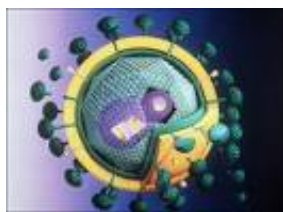
Parcours Progressif

<http://mathsv.univ-lyon1.fr>



Analyse : Exercices et Problèmes

Printemps 2021



Enseignants

Isabelle AMAT
Sandrine CHARLES
Anne-Béatrice DUFOUR
Christelle LOPES
Sylvain MOUSSET
laurence MOUTON



Biométrie et Biologie Évolutive
UMR CNRS 5558
<http://lbbe.univ-lyon1.fr>



Université Claude Bernard - Lyon 1
<http://www.univ-lyon1.fr>



Pourquoi étudier les mathématiques dès le début de la formation d'un biologiste ?

L'université, et particulièrement Lyon 1, a le devoir, et le souci, de former ses étudiants pour que leur insertion professionnelle dans le monde du travail leur permette de s'adapter aux nombreux changements qui ne manqueront pas de se produire dans les décennies à venir. Les futurs biologistes que vous serez devrez être compétents dans plusieurs disciplines et pas seulement en biologie. Que ce soit la génétique, la génomique, l'écologie ou d'autres branches de la biologie, toutes nécessitent une approche quantitative, s'appuyant sur des données.

L'Université Claude Bernard Lyon 1 est réputée pour donner à ses étudiants biologistes une solide formation en mathématiques appliquées à la biologie. Il ne s'agit pas d'enseigner les mathématiques pour elles-mêmes, mais pour vous aider à résoudre des questions de nature biologique ; vos enseignants dans ce domaine possèdent une double compétence : en biologie et en mathématiques appliquées (modélisation et statistiques essentiellement). Nous savons tous que l'étude des mathématiques appliquées à des questions biologiques nécessite des efforts ; elle requiert également d'être appréhendée chaque année du cursus universitaire. C'est pourquoi nous commençons ce type d'enseignement très tôt, dès la première année, en le proposant ensuite chaque année. Une maturation progressive s'opère alors chez les étudiants qui découvrent, souvent en fin de cursus, la pertinence de cette approche, et en sont totalement convaincus lorsqu'ils sont confrontés aux demandes de leur employeur.

Domitien DEBOUZIE, ancien Président de l'Université Lyon 1 (2002-2007).

Ont contribué à la réalisation de ce polycopié

Isabelle AMAT		Alexis AVRIL
Marc BAILLY-BECHET		Sandrine CHARLES
Marie FABLET		Vincent FORAY
David FOUCHET		Lucie FROISSART
Aurore GALLOT	Emmanuelle GILOT-FROMONT	Laurent GUÉGUEN
	Jean LOBRY	
Janice KIELBASSA	Christelle LOPES	Jodie MARTIN
Julien MARTINEZ	Arnaud MARY	Sylvain MOUSSET
Laurence MOUTON		Anne NGUYEN
Pierre-François PÉLISSON	Olivier RAYMOND	Marie-Claude VENNER
Samuel VENNER	Raquel TAVARES	Aurélien VIGNERON

Étude de fonctions

1 Séance 1

1.1 1-2* (limites-a-1-2)

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f : x \mapsto -x^3 + 2x^2 - 4$

3. $h : x \mapsto \frac{x}{2 + 3x^2}$

2. $g : x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - 1$

4. $k : x \mapsto \frac{9x^3 + 1}{x^2 - 4x + 5}$

1.2 Calcul de limites (limites-b-1-2) (limites-b-1-2)

Calculer la limite en $+\infty$ des fonctions définies ci-dessous :

1. $f_1(x) = 5 - \frac{1}{x}$

3. $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+5} - x}{\sqrt{x^2 - x}}$

2. $f_2(x) = \frac{2x + \sin x}{x}$

4. $f_4(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 3} - x$

1.3 1-4** (limites-b-1-4)

Calculer

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{2}{1-x^2} \right)$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{3x - 2}$

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3})$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5} \right)$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$

1.4 2-1* (derivees-a-2-1)

Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions suivantes en précisant l'ensemble de dérivabilité :

1. $f : x \mapsto (4 - 3x)^3$

3. $f : x \mapsto (x^4 - x^2 + 1)^3$

2. $f : x \mapsto (3x + 1)^5$

4. $f : x \mapsto (2x - 1)^2(4 - 3x)^3$

1.5 Calcul de dérivées (derivee-a-2-2) (derivees-a-2-2)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{3x - 4}{x - 2}$$

1. Déterminer la fonction dérivée f' de f .
2. En déduire la fonction dérivée de $g : x \mapsto \frac{3\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}-2}$ définie sur $[0; 4[\cup]4; +\infty[$
3. En déduire la fonction dérivée de $h : x \mapsto \frac{3\cos x - 4}{\cos x - 2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1.6 2-4* (derivees-a-2-4)

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

- | | |
|---------------------------------------|---|
| a) $y = x + \sin x$ | f) $y = (x^2 + 1)e^x$ |
| b) $y = e^x - 3x$ | g) $y = \frac{x^3}{x^n - 1}$ |
| c) $y = ae^x + be^{-x}$ | h) $y = \cos(\omega x + \alpha)$ avec α et ω constantes |
| d) $y = \frac{3x^2 - 2x + 1}{4x - 3}$ | i) $y = (x^2 + 3)^7$ |
| e) $y = \sin x \cos x$ | |

1.7 Étude de Fonctions (etufonction-b-6-1) (etufonction-b-6-1)

Étudiez et tracez les graphes des fonctions suivantes :

- | | |
|------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $y = x^4 - 2x^2$ | 6. $y = 8x^3 - 12x^2$ |
| 2. $y = \ln(1 - 2\cos x)$ | 7. $y = \frac{3x - x^2 - 2}{x^2}$ |
| 3. $y = xe^{-x}$ | 8. $y = \sin^2 x$ |
| 4. $y = \frac{x^3 - x^2 + 4}{x^2}$ | 9. $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ |
| 5. $y = \frac{\cos x}{\sin^2 x}$ | |

2 Séance 2

2.1 Enzymologie (an-probleme-ETUFON-002)

Les peroxydases sont des enzymes permettant de décomposer les peroxydes H_2O_2 , toxiques pour le fonctionnement de la cellule. Elles catalysent les réactions du type : $H_2O_2 + RH_2 \rightarrow 2H_2O + R$

En conditions expérimentales, lorsque le substrat RH_2 est en quantité suffisante (non-limitante), la vitesse (initiale) V_i de la réaction dépend de $[H_2O_2]$ la concentration en peroxyde d'hydrogène, selon le modèle suivant :

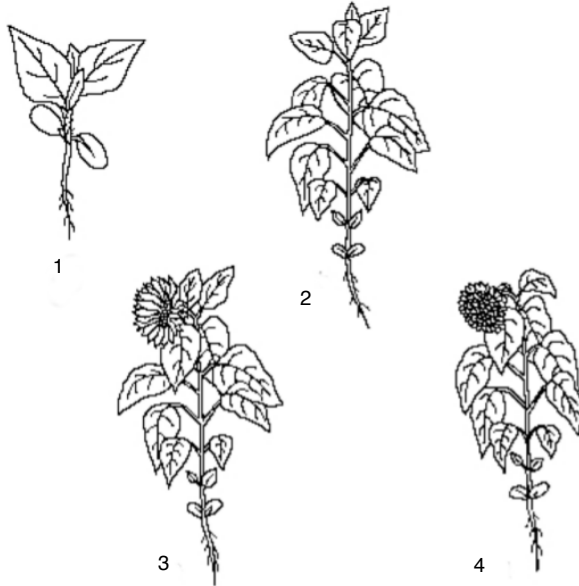
$$V_i = \frac{A \times [H_2O_2]}{B + [H_2O_2]}$$

où A et B sont des constantes positives.

1. Quelles sont les variables et les paramètres de ce modèle ?
2. Etudier les variations de la fonction V_i sur $\mathbb{R}^+$ et chercher les limites.
3. Que représente A ? Que vaut $[H_2O_2]$ lorsque $V_i = \frac{A}{2}$?
4. Tracer la courbe représentative de V_i en fonction de $[H_2O_2]$
5. Montrer que $\frac{1}{V_i}$ est une fonction linéaire de $\frac{1}{[H_2O_2]}$
6. Comment utiliser cette relation entre $\frac{1}{V_i}$ et $\frac{1}{[H_2O_2]}$ pour déterminer les valeurs de A et B à partir d'une série de mesures expérimentales de V_i ?

3 Séance 3

3.1 Modélisation de la croissance du Tournesol (an-probleme-ETUFON-003)



Stades phénologiques du Tournesol. Le modèle décrit l'accroissement en hauteur entre les stades 1 et 2. Les représentations n'ont pas la même échelle.

La croissance en hauteur (h) d'un plant de Tournesol en fonction du temps (t), mesurée à partir du moment où les deux premières feuilles se forment, peut être décrite à l'aide du modèle suivant :

$$h(t) = \frac{a \times b}{(b-a) \times e^{-k \times t} + a}$$

où a , b et k sont des constantes réelles strictement positives.

1. Quelles sont les variables et les paramètres de ce modèle ?

2. En réaliser l'étude complète, lorsque $a < b$.

3. On donne : $\frac{d^2h}{dt^2} = abk^2 \times e^{-kt} \times \frac{((b-a)e^{-kt} - a)}{((b-a) \times e^{-kt} + a)^3}$

Montrer que le point d'abscisse $\theta = \frac{1}{k} \ln \left(\frac{b}{a} - 1 \right)$ est un point d'inflexion de la courbe et tracer son graphe pour : $b = 255$, $a = 8.8$, $k = 0.1$ et $k = 0.12$.

4. Que représentent a et b ? Pourquoi s'est-on donné la contrainte $a < b$?

5. On prévoit que le changement climatique global (associant une augmentation de la teneur atmosphérique en CO_2 et une augmentation de la température atmosphérique moyenne) améliorera la capacité des végétaux à assimiler le carbone atmosphérique et à utiliser l'eau du sol. Cela devrait se traduire, par rapport aux conditions actuelles, par une croissance accélérée et une biomasse plus élevée en fin de croissance.

Comment les paramètres du modèle seront-ils affectés par le changement global ?

4 Séance 4

4.1 Pharmacocinétique dans le muscle (an-probleme-a09)

A - Présence du Médicament dans le sang Un médicament est injecté par voie intramusculaire. Il passe du muscle au sang, puis est éliminé par les reins. On désigne par $f(t)$ la quantité de médicament (en millilitres) contenue dans le sang à l'instant t (en heures). Une étude a permis de constater que, pour tout t de $[0; +\infty[$, on a :

$$f(t) = q(e^{-0.5t} - e^{-t})$$

où $t = 0$ est l'heure de l'injection et q la quantité de médicament injectée.

1. Etudier les variations de la fonction f qui, à tout t de $\mathbb{R}^+$, associe $f(t)$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de f .

B - Contrôle des effets du médicament La quantité contenue dans le sang ne doit pas dépasser le seuil de toxicité $s_M = 2.6$, et le médicament est efficace si $s_m = 1.2$.

1. Dédurre de la question A.1, les valeurs que l'on peut donner à q pour qu'à aucun moment la quantité présente dans le sang ne dépasse s_M .

On suppose désormais que $q = 10$.

2. Dans un repère orthogonal, tracer la courbe de la fonction f et sa tangente au point d'abscisse 0.
3. Déterminer graphiquement l'intervalle de temps pendant lequel le médicament est efficace.

Intégration

5 Séance 5

5.1 1-1* (primitives-a-1-1)

Calculez les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $7x^5 + 2x + 1$ | 12. $\sin x \cos x$ | 22. $\frac{1}{2x^2 - x - 1}$ |
| 2. $\frac{1}{2x}$ | 13. e^{-7x} | 23. $\frac{2x}{x^2 - 4}$ |
| 3. $x \sin x$ | 14. $\sqrt{3 - 7x}$ | 24. $\frac{3x}{x^2 - 3x - 4}$ |
| 4. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ | 15. $\tan(3x)$ | 25. $\cos^2 x$ |
| 5. $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ | 16. $\frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 5}$ | 26. $\frac{x - 1}{\sqrt{2x + 1}}$ |
| 6. $x^2 \ln x$ | 17. $\frac{1 + \tan^2 x}{2 + \tan x}$ | 27. $\cos x \ln(1 + \cos x)$ |
| 7. $x^2 e^x x^2 e^x$ | 18. $\frac{\ln x}{x}$ | 28. $\frac{2x + 3}{x^2 - x - 2}$ |
| 8. $\ln x$ | 19. $\cos^2 x \sin x$ | 29. $\frac{1}{\sin x}$ |
| 9. $x(\ln x)^2$ | 20. $\frac{x^3}{x + 2}$ | 30. $\cos x e^x$ |
| 10. $\sqrt{x} \ln x$ | 21. $\cos^3 x$ | |
| 11. $\frac{1}{3x + 5}$ | | |

5.2 2-1* (integsimples-a-2-1)

Calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_{-1}^0 x^3 + 2x - 1 \, dx$ | 5. $\int_{-2}^1 \sqrt{x + 3} \, dx$ |
| 2. $\int_0^2 e^x \, dx$ | 6. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin 4x \, dx$ |
| 3. $\int_{-2}^1 x(2x^2 + 1) \, dx$ | 7. $\int_0^1 \frac{1}{(2x + 1)^2} \, dx$ |
| 4. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} e^{2x+1} \, dx$ | 8. $\int_0^2 x e^{-x^2} \, dx$ |

5.3 1-1* (primitives-a-1-1)

Calculez les primitives des fonctions suivantes :

- | | | |
|----------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $7x^5 + 2x + 1$ | 12. $\sin x \cos x$ | 22. $\frac{1}{2x^2 - x - 1}$ |
| 2. $\frac{1}{2x}$ | 13. e^{-7x} | 23. $\frac{2x}{x^2 - 4}$ |
| 3. $x \sin x$ | 14. $\sqrt{3 - 7x}$ | 24. $\frac{3x}{x^2 - 3x - 4}$ |
| 4. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ | 15. $\tan(3x)$ | 25. $\cos^2 x$ |
| 5. $\frac{x}{\sqrt[3]{x}}$ | 16. $\frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x - 5}$ | 26. $\frac{x - 1}{\sqrt{2x + 1}}$ |
| 6. $x^2 \ln x$ | 17. $\frac{1 + \tan^2 x}{2 + \tan x}$ | 27. $\cos x \ln(1 + \cos x)$ |
| 7. $x^2 e^x x^2 e^x$ | 18. $\frac{\ln x}{x}$ | 28. $\frac{2x + 3}{x^2 - x - 2}$ |
| 8. $\ln x$ | 19. $\cos^2 x \sin x$ | 29. $\frac{1}{\sin x}$ |
| 9. $x(\ln x)^2$ | 20. $\frac{x^3}{x + 2}$ | 30. $\cos x e^x$ |
| 10. $\sqrt{x} \ln x$ | 21. $\cos^3 x$ | |
| 11. $\frac{1}{3x + 5}$ | | |

5.4 3-1* (integparties-a-3-1)

À l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales suivantes :

- | | |
|--|---|
| 1. $\int_{-1}^1 x e^{-x} dx$ | 5. $\int_1^e \ln x dx$ |
| 2. $\int_{-1}^1 (x + 1) e^{-2x} dx$ | 6. $\int_1^2 x^2 \ln x dx$ |
| 3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$ | 7. $\int_{\sqrt{e}}^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ |
| 4. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (2x - 1) \sin x dx$ | 8. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (x + 1) \ln x dx$ |

5.5 2-4* (integsimples-a-2-4)

Soit la fonction $f : x \mapsto \frac{2x + 3}{(x - 3)^2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

- Déterminer les réels a et b tels que $f(x) = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{(x - 3)^2}$.
- Calculer $\int_{-1}^0 f(x) dx$.

6 Séance 6

6.1 Croissance des platanes communs (an-probleme-PRINT-001)

On souhaite étudier la croissance des platanes communs. La vitesse de croissance $y(t)$ en mètres par mois varie au cours du temps. Cette vitesse de croissance peut s'exprimer de la façon suivante :

$$y(t) = \frac{M}{r} e^{-\frac{t}{r}}$$

où M représente la taille maximale que peut atteindre l'arbre.

1. Que représente l'intégrale $\int_{12}^{24} y(t) dt$?
2. De manière générale, que représente la fonction qui à T associe $\int_0^T y(t) dt$?
3. Calculez une primitive de $y(t)$.
4. Sachant qu'à $t = 0$ la taille du platane est de 0 mètre, déterminez la fonction $h(t)$ qui donne la taille du platane au temps t .
5. Sachant que la taille maximale M d'un platane est de 55 mètres et qu'il atteint la taille de 7 mètres au bout de 10 ans, déterminez la valeur de r . Déduisez-en la taille de l'arbre au bout de 20 ans.

7 Séance 7

7.1 Phytoremédiation (an-probleme-PRINT-002)

La phytoremédiation est une technique consistant à utiliser des plantes pour dépolluer des sols ou des eaux. *Vetiveria zizanioides* est une plante herbacée qui s'est révélée capable de stocker une grande quantité de métaux lourds comme le plomb.

La vitesse avec laquelle elle absorbe le plomb dépend de la quantité de plomb qu'elle a déjà absorbée et donc du temps depuis lequel elle a été insérée dans le milieu. En supposant que la plante a été placée dans le milieu à l'instant $t = 0$, on estime que sa vitesse d'absorption en gramme par jour est donnée par la fonction suivante :

$$y(t) = \frac{5}{t+1}$$

1. Combien de plomb la plante aura-t-elle absorbé au bout de 10 jours ?
2. Combien de temps lui faudra-t-il pour absorber 60 grammes de plomb ?
3. Trouvez la fonction $g(x)$ qui représente le temps nécessaire à la plante pour absorber x grammes de plomb.
4. La vitesse d'absorption de la plante donnée par $y(t)$ vous semble-t-elle réaliste ? Pourquoi ?

8 Séance 8

8.1 Vitesse de croissance d'une population bactérienne (an-probleme-PRINT-003)

Après un ensemencement au temps 0, on considère la vitesse de croissance d'une population bactérienne. Cette vitesse $y(t)$ varie en fonction du temps, et peut s'exprimer sous la forme : $y(t) = 1 + K(t - 1)e^{t-2}$ où K est une constante

1. Calculer la primitive $N(t)$ de $y(t)$ qui vaut N_0 à l'instant $t = 0$.
2. Que représente $N(t)$?
3. Si $K = 1$ et $N_0 = 100$, que vaut $N(6)$?
4. En pratique, on ne connaît pas K et on veut l'évaluer à partir d'observations.
Si $N_0 = 100$ et $N(4) = 134$, que vaut K ?

En réalité, il est difficile de mesurer directement la taille de la population $N(t)$. En revanche, on sait doser la quantité de toxine produite par ces bactéries. La quantité de toxine produite à l'instant t est proportionnelle à la taille de population : $q(t) = \frac{N(t)}{50}$ (exprimée en μg). En quantifiant la quantité de toxine accumulée au cours du temps, on pourra estimer $N(t)$ et K .

5. A partir de la fonction $N(t)$, calculer la quantité de toxine accumulée entre 0 et T . On notera $Q(T)$ cette quantité accumulée.
6. Quelle est alors la quantité de toxine produite en moyenne pendant T ?
7. Si à partir de $N_0 = 100$, la quantité de toxine produite en moyenne pendant une durée $T = 4$ est $8,96 \mu g$, que vaut K ?

Équations différentielles ordinaires

9 Séance 9

9.1 1-1* (edo1varsep-a-1-1)

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' = 4y$

2. $y' = -y\sqrt{2}$

3. $2y' = 3y$

4. $3y' + y = 0$

9.2 Variables séparables (edo1varsep-b-1-1) (edo1varsep-b-1-1)

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' = y \cos x$.

2. $y' = y(3x^2 - 6x + 1)$.

3. $y' = y \ln x$.

9.3 2-5** (edo1lineaires-b-2-5)

Résoudre les équations suivantes

1. $-7y' + 2y = 3$ avec $y(0) = 0$

2. $2y' + y = -x^2(6 + x)$ avec $y(1) = 2$

3. $-2y' + y = -8 \cos(x) - \sin(x)$ avec $y(\pi) = 1$

4. $y' - 2y = e^{2x}(2 - 3x + x^2)$ avec $y(0) = 1$

9.4 (edo1lineaires-b-2-2) (edo1lineaires-b-2-2)

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' - 2y = -3 - 4x + 2x^2$

2. $2y' + y = -x^2(6 + x)$

3. $y' - 5y = -5 - 2x + 5x^2$

9.5 Méthode de la variation de la constante (edo1lineaires-b-2-6) (edo1lineaires-b-2-6)

Résoudre les équations suivantes :

1. $y' \cos(x) - y \sin(x) = e^{3x}$

2. $y' - xy = -x$

3. $(1 - x^2)y' - 2xy = 3x^2 - x^4$

10 Séance 10

10.1 Température d'un corps (an-probleme-a11)

La température θ d'un corps placé dans une enceinte dont la température α est supposée constante, évolue au cours du temps de la façon suivante : “la vitesse de variation de la température est proportionnelle à la différence $\theta - \alpha$ et de signe opposé”.

Exprimer θ en fonction du temps t .

10.2 Modèle à compartiments (an-probleme-a14)

On étudie le comportement d'un modèle à compartiments, d'utilisation fréquente en chimie et en biologie ; celui-ci ne comprend que deux compartiments (1) et (2). Au temps $t = 0$, on introduit dans le compartiment (1) une quantité y_0 d'une substance A. Cette substance peut passer dans le compartiment (2), qui n'en contient pas au départ ; la substance ne peut pas revenir en (1).

On étudie le compartiment (1) et l'on admet que la vitesse de passage de la substance A de (1) vers (2) est proportionnelle (coefficient k) à la quantité y_1 de cette substance dans (1).

On demande :

1. d'écrire l'équation différentielle en y_1 qui régit le phénomène, en affectant du signe moins toute quantité qui quitte le compartiment (1).
2. de trouver, à partir de l'équation précédente, la fonction $y_1(t)$.

On étudie le compartiment (2).

On demande :

1. d'écrire la fonction $y_2(t)$ qui donne, en fonction du temps, la quantité y_2 de substance A présente dans le compartiment (2).
2. de calculer le temps θ au bout duquel les deux compartiments contiennent autant de substance A l'un que l'autre. On posera pour le calcul $k = \frac{\ln 2}{10}$.

11 Séance 11

11.1 Croissance pondérale (an-probleme-a12)

Pendant une période allant de $t = 0$ à $t = t_1$ du développement d'un organisme, on admet que la vitesse de croissance pondérale est proportionnelle à son poids. On obtient ainsi l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp(t)}{dt} = kp(t)$$

avec k constante de croissance.

On sait d'autre part qu'à $t = 0$, $p(0) = p_0$.

1. Résoudre cette équation et étudier l'évolution du poids de cet organisme au cours de la croissance. Faire une représentation graphique.

On a été amené à déterminer les paramètres de la loi établie ci-dessus, à l'aide de mesures faites sur un grand nombre d'individus ; on a obtenu ainsi les résultats suivants, avec t le temps en jour et p le poids en grammes :

$$\begin{array}{ll} t = 0 & p(0) = p_0 = 1 \\ t = 10 & p(10) = 2.718 \end{array}$$

2. Trouver la valeur de la constante de croissance dans ce cas.

Le modèle de croissance précédent ne s'avérant pas satisfaisant, on a été amené, au prix de nouvelles hypothèses, à construire un modèle plus complexe. On a abouti à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dp(t)}{dt} = ap(t) - bp(t)^2$$

3. En supposant que $a > b$, intégrer cette équation différentielle, sachant qu'à $t = 0$, $p(0) = p_0 = 1$.
4. Étudier l'évolution du poids pendant la croissance. Comparer la courbe obtenue en 1. à celle-ci, quelles sont vos conclusions ?
5. Que se passe-t-il si $a < b$?

12 Séance 12

12.1 Lionel a-t-il tué Valérie ? (an-probleme-EDO-007)

Le lundi 14 juin 2010, un joggeur matinal découvre le cadavre de Valérie dans le parc Jovet à Valence. La police est rapidement appelée sur les lieux et fait les premières constatations exactement à 9h du matin, afin d'établir l'heure du décès :

- La température interne du cadavre est de 29°C .
- La température de l'air ambiant est de 16°C .

L'enquête de police fait apparaître que la victime a passé la soirée du 13 au 14 juin avec son compagnon, Lionel, qui devient de ce fait le principal suspect. Lionel décrit ainsi la soirée qu'il a passée avec Valérie :

- Le couple a dîné dans un restaurant antillais près de la gare de Valence.
- Entre 22h et 23h54, le couple s'est promené dans le centre-ville de Valence.
- A 23h54, Valérie a accompagné Lionel à la gare de Valence où Lionel a pris le train de nuit pour Biarritz (il devait se rendre à Biarritz pour des raisons professionnelles).

Le chef du restaurant antillais atteste que le couple a quitté son restaurant peu après 22h. La présence du suspect à bord du train est aussi confirmée par de nombreux témoins. En revanche, personne ne se souvient d'avoir aperçu Valérie à la gare de Valence. L'établissement exact de l'horaire de la mort permettra donc de disculper le suspect (si la mort est postérieure au départ du train).

Pour tenter d'établir l'heure de la mort, on modélise l'évolution de la température d'un corps après la mort à l'aide de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{20}y = \frac{1}{20}\theta \quad (1)$$

où θ est la température extérieure supposée constante.

Résolvez l'équation différentielle (1). Pour cela :

1. Résolvez l'équation différentielle *sans second membre* correspond à l'équation (1).
2. Par la méthode de variation de la constante, déterminez la forme générale des solutions de l'équation différentielle (1).

On choisit de placer l'origine du temps ($t = 0$) au moment où la température du corps est prise par le médecin légiste. Les instants de la sortie du restaurant et du départ du train correspondent alors respectivement à $t = -11$ et $t = -9.1$.

3. Donnez l'expression de la solution de l'équation (1) satisfaisant la condition initiale $y(0) = 29$.

A l'instant de la mort, la température du corps de la victime était de 37.5°C . Pour déterminer le temps écoulé entre la mort et l'instant où la température du cadavre a été mesurée, on doit donc retrouver le temps t_m satisfaisant :

$$y(t_m) = 37.5$$

4. Exprimez t_m en fonction de la température ambiante θ .
5. En faisant l'hypothèse que la température extérieure θ est restée constante entre l'instant du crime et le moment où la température du corps a été mesurée (on a alors $\theta = 16$), estimez le temps t_m écoulé depuis la mort de la victime.

Devant un résultat accusateur, les avocats de Lionel montrent que la température ambiante a varié durant la nuit du crime et qu'il convient d'en tenir compte.

Un relevé des températures de la nuit est présenté sur la Figure 1 (points bleus). Il montre que l'évolution de la température de la nuit peut être modélisée par la fonction polynomiale de l'équation suivante (en rouge sur la Figure 1) :

$$\Theta(t) = \frac{t^3}{100} + \frac{2t^2}{5} + 3t + 16 \quad (2)$$

On propose donc d'utiliser comme valeur du paramètre de température ambiante θ la valeur moyenne de la température entre 22h et 9h, soit entre les temps $t = -11$ et $t = 0$.

6. Calculez la nouvelle valeur proposée pour le paramètre θ .
7. En appliquant la formule obtenue à la question 4 et votre nouvelle estimation de θ , estimez le temps t_m écoulé depuis la mort de la victime.

Finalement, le modèle le plus précis possible de l'estimation de la température du corps est obtenu en remplaçant directement θ de l'équation (1) par $\Theta(t)$ de l'équation (2) :

$$\frac{dy}{dt} + \frac{1}{20}y = \frac{1}{20}\Theta(t) \quad (3)$$

La solution de l'équation (3) satisfaisant la condition initiale $y(0) = 29$ est :

$$y(t) = \frac{t^3}{100} - \frac{t^2}{5} + 11t - 204 + 233e^{-\frac{t}{20}} \quad (4)$$

La courbe représentative de cette fonction $y(t)$ est donnée sur la Figure 2.

8. A l'aide de la représentation graphique de la Figure 2, dites si l'estimation la plus précise possible de t_m sera favorable ou défavorable à Lionel. Vous justifierez votre réponse.

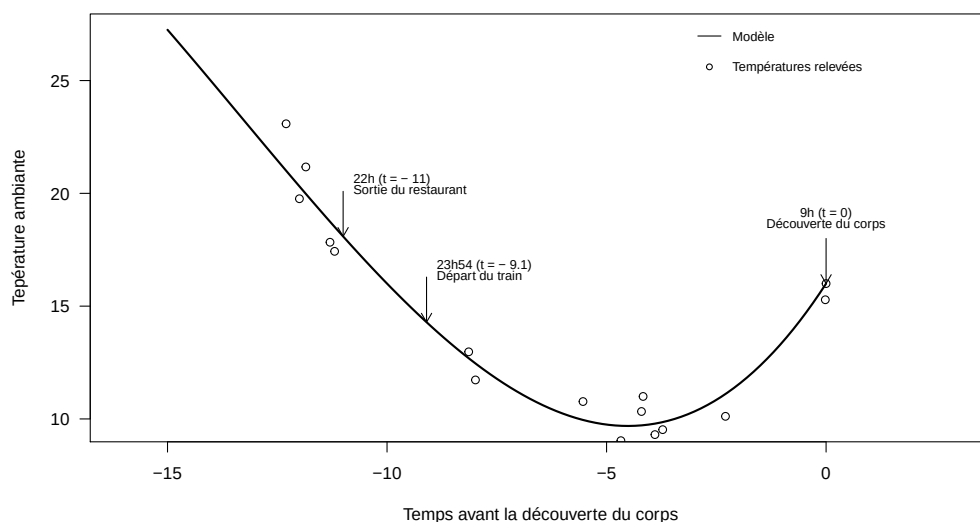


Figure 1 : Température ambiante à Valence dans la nuit du 13 au 14 mai 2010.

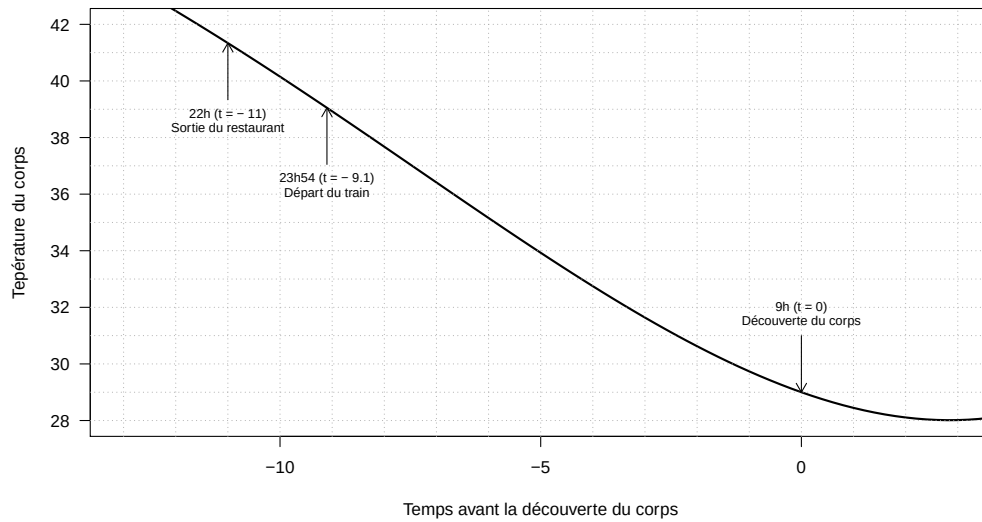


Figure 2 : Evolution de la température du corps de la victime (d'après l'équation (4)).

D'autres problèmes pour vous entraîner

13 Études de fonction

13.1 Architecture du système vasculaire (an-probleme-ETUFON-001)

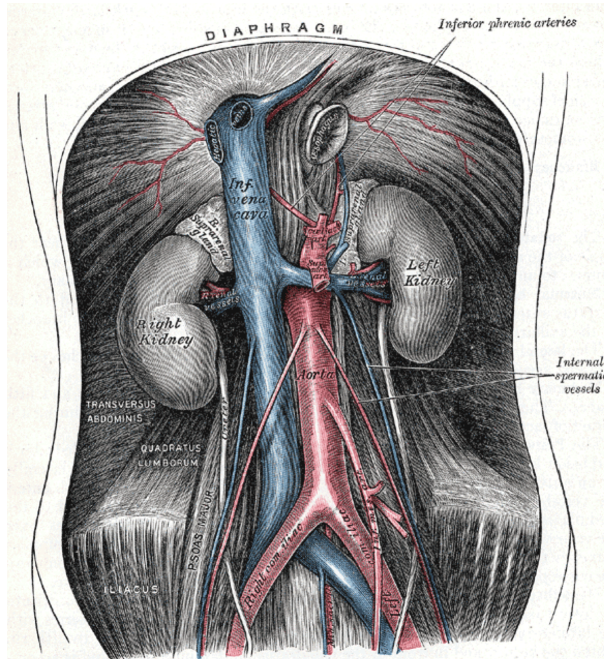


Figure 1 : Ramification de l'aorte abdominale en deux artères iliaques (Gray, H. (1918) *Anatomy of the human body*. Philadelphia : Lea & Febiger, 1396 p.)

On suppose que l'évolution par sélection naturelle a favorisé l'apparition de systèmes vasculaires efficaces (Figure 1), capables de maintenir un débit sanguin à un coût énergétique minimal. On cherche à décrire l'architecture des systèmes vasculaires respectant ce critère d'optimalité ; en particulier on souhaite déterminer, pour un débit sanguin donné, le rayon optimal des vaisseaux.

Le coût énergétique ($P(r)$) du maintien d'un débit constant de sang dans un vaisseau peut être décrit comme une fonction de r , rayon du vaisseau sanguin à l'aide de la relation suivante :

$$P(r) = v \times d^2 \times r^{-4} + m \times r^2$$

où v est une constante positive de viscosité du sang, d est le débit sanguin et m est une constante métabolique positive.

Dans le membre de droite de cette égalité, le premier terme quantifie l'énergie nécessaire à fournir un débit d compte-tenu de la viscosité du sang (loi de Poiseuille) ; le deuxième terme représente le coût de maintenance d'un certain volume de sang.

1. Etudier les variations de P en fonction de r , puis déduire pour quelle valeur de $r = r_{\text{opt}}$, P est minimale. On ne demande pas l'expression de P_{opt} .
2. Lorsque $r = r_{\text{opt}}$, donner l'expression du débit sanguin d en fonction de r_{opt}^3 .
3. Donner une interprétation biologique des limites de P en 0 et $+\infty$.

4. On considère un vaisseau de rayon r_0 se ramifiant en deux vaisseaux de rayon r_1 et r_2 (c'est le cas par exemple de l'aorte abdominale qui se divise en deux artères iliaques au niveau de la quatrième vertèbre lombaire). Si l'architecture de ces vaisseaux respecte le critère d'optimalité précédemment énoncé, et en admettant que le débit sanguin reste constant d'un niveau de ramification à l'autre ($d_0 = d_1 + d_2$), quelle relation existe entre r_0 , r_1 et r_2 ?

14 Intégration

14.1 La scarlatine (an-probleme-PRINT-004)

La scarlatine est due à une bactérie de type streptocoque, qui produit une substance toxique dans l'organisme. Le taux de sécrétion de toxine par bactérie est 5 ng par heure (notre unité de temps). $1 \text{ ng} = 10^{-9} \text{ g}$

Cette bactérie est très facilement détruite à l'aide d'un antibiotique générique, mais il faut plus de temps pour que l'organisme élimine la toxine. C'est ce que nous allons étudier.

Après une inoculation au temps 0, on considère la croissance de cette population bactérienne. Si $p(t)$ est la population au temps t ,

$$p(t) = 10^6 \cdot \frac{t^2}{1+t}$$

Modèle 1

1. Montrer que p est une fonction croissante, et qu'à partir de $t = 4$, le taux de sécrétion de la toxine est supérieur à $0,016 \text{ g/h}$.
2. Calculer la primitive $N(T)$ de $p(t)$ qui vaut 0 à l'instant $t = 0$.
3. Combien de toxine a été sécrétée entre l'inoculation et le temps $t = 50 \text{ h}$?

Modèle 2

1. L'organisme parvient à se débarrasser lentement de la toxine, à un taux maximal de $0.016 \text{ g/h} = 16 \cdot 10^6 \text{ ng/h}$. Expliquer pourquoi aucune toxine ne s'accumule dans l'organisme avant $t = 4 \text{ h}$.
2. En fin de compte, quelle quantité de toxine va s'accumuler dans l'organisme entre l'inoculation et le temps $t = 50 \text{ h}$?
3. Au temps $t = 50 \text{ h}$, l'individu prend des antibiotiques qui détruisent rapidement les bactéries.
 - (a) Si les bactéries étaient instantanément détruites à $t = 50 \text{ h}$, en combien d'heures l'organisme parviendrait-il à éliminer toutes ces toxines ?

En fait, la population de bactéries diminue progressivement. Après le temps $t = 50 \text{ h}$, cette population vaut $p_2(t) = p(50) - 10^6 \cdot (t - 50)^3$, jusqu'à devenir nulle.

- (b) Que vaut $p(50)$? En déduire le temps où les bactéries auront toutes disparu. La toxine pourra-t'elle avoir été entièrement éliminée avant ce temps ?
- (c) Combien de toxine sera encore sécrétée par les bactéries pendant le temps d'action de l'antibiotique ?
- (d) Dans ce cas, combien faudra-t-il de temps pour que toutes les toxines soient nettoyées de l'organisme ?

15 Équations différentielles ordinaires

15.1 Morphométrie de la daphnie (an-probleme-EDO-008)

La daphnie est un crustacé de la famille des cladocères dont la taille varie entre 0.2 et 3.0 mm au maximum. Les cladocères vivent dans la région pélagique des lacs, mais sont aussi retrouvés dans les plantes et sur le substrat dans la zone littorale des lacs et des marais. En fonction de l'habitat, leur couleur est blanchâtre et translucide en grande eau, alors que dans des habitats avec végétation, ils sont plutôt verdâtres ou jaunâtres. La reproduction est parthénogénétique durant une grande partie de l'année et seules des femelles sont alors produites.

La croissance de ces organismes en laboratoire est très étudiée. On sait par ailleurs que la croissance suit un modèle de von Bertalanffy d'équation :

$$\frac{dL(t)}{dt} = k(L_\infty - L(t)) \quad (1)$$

avec $k > 0$ et $L_\infty > 0$.

1. Quelles sont les variables et que représentent-t-elles ? Quels sont les paramètres ? Comment interprétez-vous cette équation ?
2. Résoudre l'équation différentielle. On supposera que $L(t = 0) = L_0$.
3. D'après l'énoncé, donner la valeur de L_∞ .
4. Supposons que l'on mesure deux daphnies, à deux intervalles de temps t_1 et t_2 ; on obtient alors $L(t_1) = L_1$ et $L(t_2) = L_2$. Montrer que :

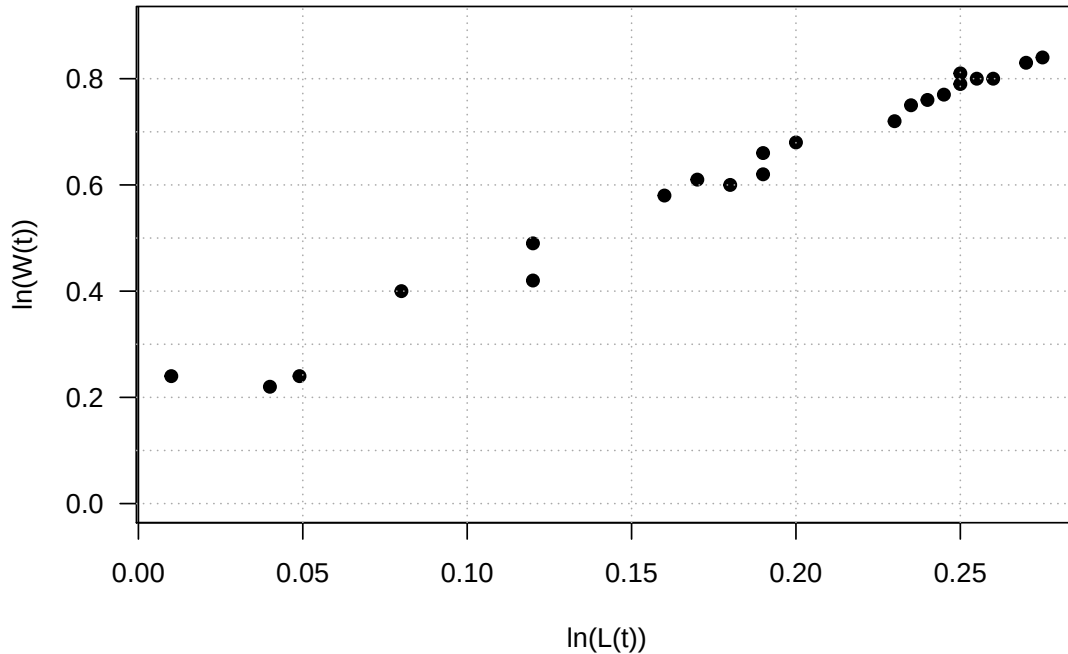
$$\ln \left(\frac{L_2 - L_\infty}{L_1 - L_\infty} \right) = k(t_1 - t_2) \quad (2)$$

5. Comme chez beaucoup d'espèces, le poids ($W(t)$) et la taille des daphnies sont reliés par une relation d'allométrie de la forme :

$$W(t) = aL(t)^b \quad (3)$$

Donner l'expression de $\ln(W(t))$.

6. A supposer que les daphnies gardent la même forme toute leur vie, on obtient alors $b = 3$. Le graphe ci-dessous vous permet-il de confirmer cette hypothèse ? Justifier.



15.2 Délai post-mortem (an-probleme-EDO-004)

Après le décès, l'arrêt des phénomènes d'homéothermie entraîne un équilibre progressif de la température du corps avec celle de son environnement (dans les pays tempérés il s'agira donc le plus souvent d'un refroidissement). Bien que ce phénomène soit connu de longue date, son intérêt potentiel dans le champ de la médecine légale n'a été identifié que vers le milieu du XIX^e siècle. Le principal intérêt du refroidissement en tant que marqueur du délai post-mortem est qu'il s'agit d'un phénomène aisément quantifiable, à la différence des autres marqueurs cadavériques.

Sous les climats tempérés, la température de la peau rejoint celle du milieu environnant en 8 à 12 heures en moyenne mais la température centrale du cadavre nécessite pour ce faire un délai deux à trois fois plus important. Ces constatations ont mené à un certain nombre de simplifications selon lesquelles les variations de températures à la surface d'un corps sont (en première approximation) proportionnelles à sa température relative ; c'est à dire à l'écart entre sa propre température, et celle de l'environnement.

Modélisation mathématique

Plus formellement, si $x(t)$ désigne la température de ce corps au temps t , nous avons :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\lambda(x(t) - \theta) \quad (4)$$

où $\theta > 0$ désigne la température de l'environnement, et $\lambda > 0$ une constante de refroidissement.

1. Expliquer cette équation.
2. Montrer que la solution de l'équation associée à une condition initiale $x(0)$ est donnée par la formule :

$$x(t) = \theta + (x(0) - \theta)e^{-\lambda t} \quad (5)$$

3. Vérifier la formule :

$$\lambda(t_2 - t_1) = \ln \left(\frac{x(t_1) - \theta}{x(t_2) - \theta} \right)$$

Utilisation pratique

Sur une scène de décès il est essentiel de mesurer la température centrale du cadavre aussi bien que celle de l'environnement (c'est-à-dire la température de l'air ambiant). Les deux mesures doivent être réalisées au même moment, et l'heure de la mesure doit être notée avec précision. La prise de température ne doit jamais être effectuée avec un thermomètre médical, car sa gamme de températures est trop restreinte, l'instrument de référence étant le thermomètre électronique à thermocouple, de grande précision.

La méthode thermométrique suppose que la température corporelle au moment du décès se trouvait dans les limites physiologiques (37°C). Lorsqu'elle est mesurée dans des conditions appropriées, la température du corps doit être considérée comme l'un des meilleurs estimateurs du délai post-mortem pendant les 24 premières heures.

Un corps humain est trouvé à minuit dans une chambre d'hôtel, et sa température est de 24°C . La température ambiante est supposée constante, et égale à 20°C . Deux heures plus tard, la température du corps est descendue à 21°C .

4. Trouver la valeur approximative de la constante λ (vous donnerez trois chiffres après la virgule).
5. Au moment où le corps est découvert, depuis combien de temps la personne est-elle décédée ? A quelle heure remonte donc la mort ?

15.3 Toxicocinétique d'un polluant (an-probleme-EDO-005)

On s'intéresse à l'accumulation, par une espèce aquatique, d'un polluant présent dans son environnement. Cette espèce se reproduit une fois par an à la fin de l'hiver. Les adultes meurent après la reproduction. Les jeunes émergent des oeufs ne sont pas initialement contaminés par le polluant.

La concentration $x(t)$ du polluant à l'intérieur de l'organisme vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad (1)$$

où f est la concentration en polluant dans l'environnement au temps t . Le temps est compté en semestres (6 mois), l'origine ($t = 0$) est placée au début du printemps, la naissance des organismes a lieu au temps $t = 1$.

1. Donnez la forme générale des solutions de l'équation (1) sans second membre.

2. On fait l'hypothèse que la concentration en polluant dans l'environnement est constante et vaut $f(t) = 8/15$. L'équation du modèle devient :

$$\frac{dx}{dt} + x = 8/15 \quad (2)$$

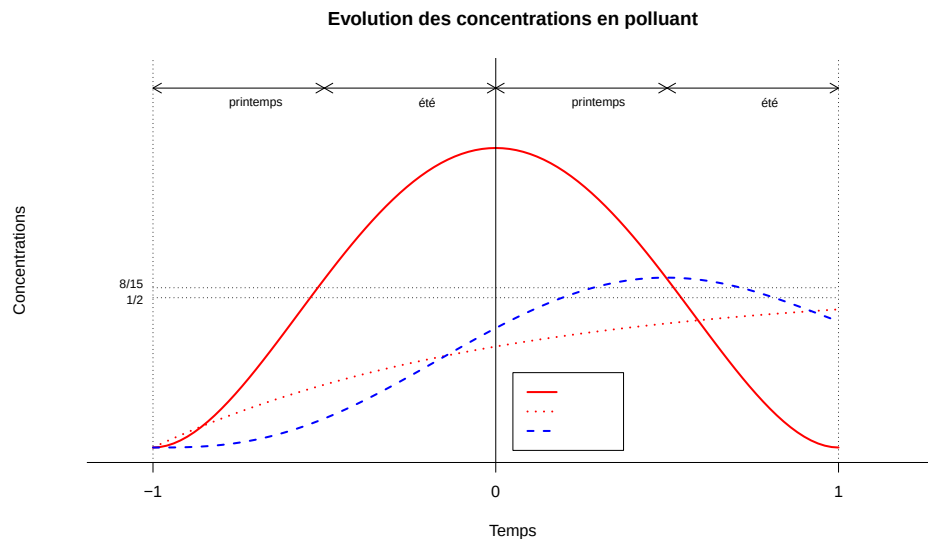
Résolvez l'équation (2). Pour cela :

- (a) Trouvez une solution particulière de l'équation (2) (il existe une solution particulière évidente).
 - (b) Donnez la forme générale des solutions de l'équation (2).
 - (c) Trouvez la solution de l'équation (2) vérifiant la condition initiale $x(-1) = 0$. On notera $x_c(t)$ cette solution.
3. En fait, la concentration en polluant dans l'environnement varie au cours du temps et vérifie $f(t) = t^4 - 2t^2 + 1$. L'équation du modèle devient :

$$\frac{dx}{dt} + x = t^4 - 2t^2 + 1 \quad (3)$$

Résolvez l'équation (3). Pour cela :

- (a) Trouvez un polynôme de degré 4 solution particulière de l'équation (3).
 - (b) Donnez la forme générale des solutions de l'équation (3).
 - (c) Trouvez la solution de l'équation (3) vérifiant la condition initiale $x(-1) = 0$. On notera $x_v(t)$ cette solution.
4. La Figure 1 représente les fonctions $x_c(t)$ (trouvée à la question 2(c)), $f(t)$ (donnée à la question 3) et $x_v(t)$ (trouvée à la question 3(c)). Complétez la légende de la Figure 1 en associant chaque fonction à sa courbe représentative.



5. Si la concentration à l'intérieur de l'organisme dépasse le seuil létal $x_{letal} = 1/2$, alors l'individu meurt. En considérant le moment de la reproduction sur le graphique de la Figure 1, dites si l'espèce pourra se maintenir lorsque la concentration en polluant dans l'environnement est constante (question 2) et lorsque la concentration en polluant varie (question 3). Justifiez brièvement.

15.4 Cuisson de l'œuf (an-probleme-EDO-006)

On cherche à modéliser la cuisson d'un œuf plongé dans une casserole d'eau bouillante. Les cuisiniers adeptes de la cuisine moléculaire connaissent bien certains des paramètres régissant la cuisson des œufs :

- Le blanc de l'œuf commence à coaguler lorsque sa température atteint 62°C.
- Le jaune de l'œuf commence à coaguler lorsque sa température atteint 68°C.

Pour une cuisson à *la coque* les livres de cuisine les plus anciens recommandent généralement de plonger l'œuf dans l'eau bouillante pendant 3 minutes.

Premier modèle : répartition uniforme de la chaleur dans l'œuf

Dans un premier temps, on suppose que la température à l'intérieur de l'œuf est uniforme et que l'eau de la casserole reste à une température constante de 100°C. Les échanges de chaleur se font entre l'eau et l'œuf à travers la coquille.

On note T la température à l'intérieur de l'œuf qui varie avec le temps t (exprimé en minutes). T vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT}{dt} = \alpha(100 - T)$$

où $\alpha > 0$ est une paramètre de conduction thermique. On peut simplifier cette équation en utilisant le changement de variable $f = T - 100$. L'équation devient alors :

$$\frac{df}{dt} = -\alpha f \quad (1)$$

1. Donnez l'expression générale des solutions de l'équation (1).
2. Au temps $t = 0$, la température de l'œuf est T_0 (on note $f(0) = f_0 = T_0 - 100$). Donnez, en fonction de f_0 , l'équation de la solution de l'équation (1) vérifiant cette condition initiale.
3. Lorsque l'œuf est initialement stocké à température ambiante ($T_0 = 20 \Leftrightarrow f_0 = -80$), sa température est de 68°C au temps $t = 3$ minutes (soit $f(3) = -32$). Calculez la valeur du paramètre α .
4. On propose de fixer $\alpha = 0.3$. On considère à présent un œuf initialement stocké au froid et vérifiant $T_0 = 4$ (soit $f_0 = -96$). Le blanc de l'œuf sera-t-il coagulé au temps $t = 3$ minutes ? Justifiez votre réponse.
5. Combien de temps faut-il cuire alors l'œuf pour le blanc coagule ?

Deuxième modèle : répartition de la chaleur dans deux compartiments uniformes

Dans un deuxième temps, on propose de modéliser la compartimentation de l'œuf en deux compartiments (le "blanc" et le "jaune"). La chaleur se répartit uniformément à l'intérieur de chaque compartiment et diffuse du blanc vers le jaune. On note T_b la température du blanc et T_j la température du jaune. On suppose que la température du blanc vérifie l'équation suivante :

$$T_b(t) = 100 - 80e^{-0.3t} \quad (2)$$

La température du jaune vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dT_j}{dt} = \beta(T_b - T_j)$$

où β est un paramètre de conduction thermique entre le blanc et le jaune de l'œuf (on suppose $\beta \neq 0.3$).
En effectuant le changement de variable $g = T_J - 100$ et en utilisant l'expression de l'équation (2), on obtient l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dg}{dt} + \beta g = -80e^{-0.3t} \quad (3)$$

6. Résolvez l'équation différentielle *sans second membre* correspond à l'équation (3).
7. Vérifiez que $g_{part}(t) = -80 \frac{\beta}{\beta - 0.3} e^{-0.3t}$ est une solution particulière de l'équation (3).
8. Finalement, la forme générale des solution de l'équation (3) est :

$$g(t) = Ke^{-\beta t} - 80 \frac{\beta}{\beta - 0.3} e^{-0.3t}$$

Montrez que $K = 80 \frac{\beta}{\beta - 0.3}$ permet de satisfaire la condition initiale $T_J(0) = 20$ (c'est-à-dire $g(0) = -80$).

Température moyenne du jaune d'œuf durant la cuisson d'un œuf à la coque

Finalement, la température du jaune d'œuf durant la cuisson vérifie :

$$T_J(t) = 100 - 80(1.3e^{-0.3t} - 0.3e^{-1.3t})$$

9. On note $\tilde{T}_J$ la température moyenne du jaune de l'œuf entre les instants $t = 0$ et $t = 3$. Comment calculer $\tilde{T}_J$? On ne demande pas d'effectuer le calcul.
10. Calculez $\int_0^3 e^{\lambda t} dt$ où $\lambda \neq 0$.
11. En déduire une expression de $\tilde{T}_J$ sous la forme :

$$\tilde{T}_J = \frac{1}{3}(300 + A \times (e^{-0.9} - 1) - B \times (e^{-3.9} - 1))$$

Vous donnerez les expressions de A et B .

12. Donnez une valeur approchée de $\tilde{T}_J$.

