TD avec le logiciel

Biologie et Modélisation
TP7 : Modèles discrets dans $\mathbb{R}$

Automne 2018

Contents

1 Définition des modèles étudiés

Les modèles discrets de dynamique des populations sont définis par leur fonction récursive :

$$N_{t+1} = f(N_t)$$

Au cours de ce TD, nous étudierons les mêmes modèles que lors du TP précédent mais sous leur forme discrète :

- Le modèle exponentiel

  $$N_{t+1} = rN_t$$

  où r et K sont des paramètres positifs.
- Le modèle logistique

  $$N_{t+1} = rN_t\left(1 - \frac{N_t}{K}\right)$$

  où r et K sont des paramètres positifs.
- Le modèle de Gompertz

  $$N_{t+1} = -rN_t \ln\left(\frac{N_t}{K}\right)$$

  où r et K sont des paramètres positifs.

  On appellera N_0 la condition initiale.

2 Analyse qualitative des systèmes discrets

2.1 Points d'équilibre

1. Comment obtient-on les points d'équilibre d'un modèle discret de dynamique des populations ?

2. Retrouvez les points d'équilibre du *modèle exponentiel discret.*

3. Quels sont les points d'équilibre du *modèle logistique discret*.

4. Et ceux du *modèle de Gompertz discret* ?

2.2 Stabilités des points d'équilibre

5. Comment connait-on la stabilité d'un point d'équilibre d'un modèle discret ?

6. Déterminez la stabilité des points d'équilibre du *modèle exponentiel discret*.

7. Faites de même pour le *modèle logistique discret*.

8. Et pour le *modèle de Gompertz discret*.

3 Simulations numériques

3.1 Implémentation des modèles

1. Créez des fonctions génériques qui retournent, selon les valeurs de r, K et N_0, un tableau avec le temps dans la première colonne et l'effectif de la population à chaque temps selon le *modèle logistique simple* et le *modèle de Gompertz*, pour t allant de 0 à t_{max}. Un exemple vous est donné ci-dessous pour simuler le *modèle exponentiel*.

```
> rm(list=ls()) #réinitialisation de toutes les variables
> expoD=function(r,N0,tmax)
+ {
+   t=seq(0,tmax)      # vecteur des temps de simulation
+   N=numeric(length(t))  # vecteur de l'effectif de la population pour chaque temps
+   N[1]=N0               # N0 = condition initiale
+   for(i in 2:length(t)) N[i]=r*N[i-1]
+   #ou for(i in 1:(length(t)-1)) N[i+1]=r*N[i]
+   tab=as.data.frame(cbind(t,N))
+   return(tab)           # la fonction retourne un tableau avec les temps de simulation dans la première
+   # colonne et la valeur de N corresponsdante dans la deuxième colonne.
+ }
```

Application du modèle exponentiel pour $r = 2$, $N0 = 2$ et $t_{max} = 50$:

```
> Nexpo1 <- expoD(2,2,50)
> head(Nexpo1)

  t  N
1 0  2
2 1  4
3 2  8
4 3 16
5 4 32
6 5 64
```

Application du modèle logistique pour $r = 2$, $K = 10$, $N0 = 2$ et $t_{max} = 50$:

```
> Nlog1=logistiqueD(N0=2, r=2, K=10, tmax=50)
> head(Nlog1)

  t        N
1 0 2.000000
2 1 3.200000
3 2 4.352000
4 3 4.916019
5 4 4.998589
6 5 5.000000
```

Application du modèle de Gompertz pour $r = 2$, $K = 10$, $N0 = 2$ et $t_{max} = 50$:

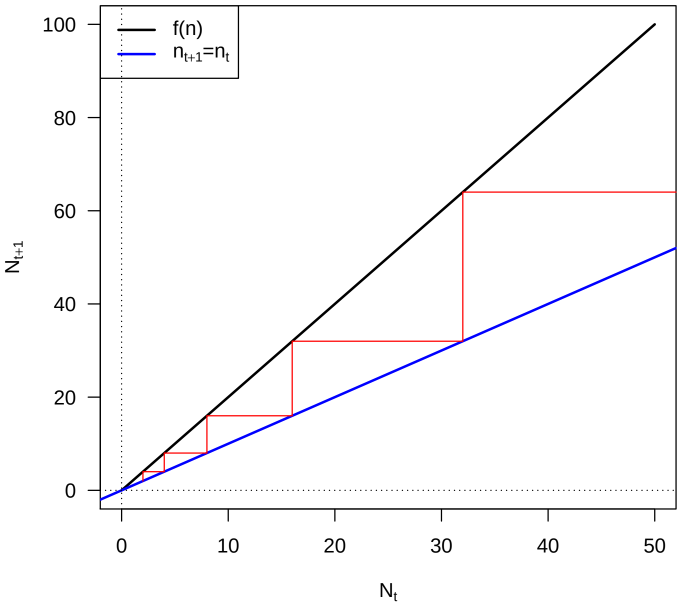
```
> Ngom1=gompertzD(N0=2, r=2, K=10, tmax=50)
> head(Ngom1)

  t        N
1 0 2.000000
2 1 6.437752
3 2 5.670446
4 3 6.433885
5 4 5.674771
6 5 6.430139
```

3.2 Représentation en toile d'araignée (cobweb)

La représentation en toile d'araignée consiste à représenter la suite $N_{t+1} = f(N_t)$ en utilisant les courbes d'équations $N_{t+1} = f(N_t)$ et $N_{t+1} = N_t$. Un exemple est donné ci-dessous pour le *modèle exponentiel* :

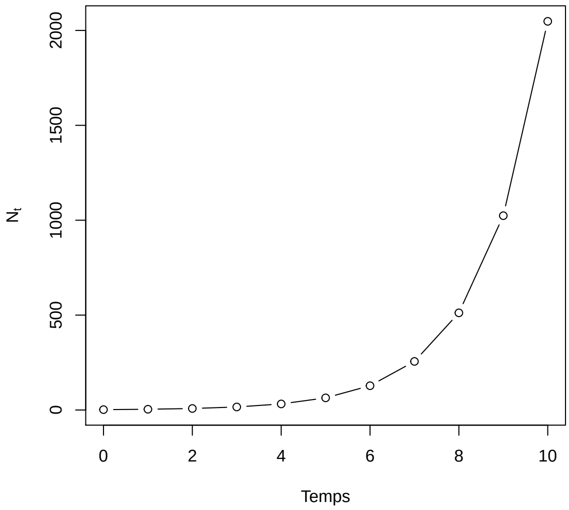
```
>     r <- 2
>     N0 <- 2
>     tmax <- 50
> Ntab <- expoD(r,N0,tmax) # la fonction expo retourne un tableau
> N=Ntab[,2]                  # je ne garde que la deuxième colonne du tableau = N
> curve(r*x, from=0, to=50, n=length(N), las=1,
+       xlab=expression(N[t]), ylab=expression(N[t+1]),lwd=2)
> abline(a=0,b=1, col="blue",lwd=2)
> abline(h=0,lty=3)
> abline(v=0,lty=3)
> points(N, N, type="S", col="red")
> legend("topleft",c("f(n)",expression (paste(paste(n[t+1],"="),n[t]))),lty=1,col=c("black","blue"),lwd=2)
```



2. Tracez les diagrammes en toile d'araignées pour les modèles implémentés plus haut pour $N_0 = 2$, $r = 1.5$, $K = 10$ et $tmax = 50$.

3.3 Chroniques

Une fois les simulations numériques réalisées, on peut représenter l'évolution de N_t au cours du temps: c'est ce qu'on appelle les chroniques. Voici un exemple pour le modèle exponentiel:



Pour chacun des deux modèles :

3. Tracez (sur 4 graphes différents) les courbes montrant l'évolution de N au cours du temps, pour t allant de 0 à 50, $N_0 = 10$, $K = 1000$ et $r = 1.5$, 2.8, 3.1 et 3.7. Attention à bien représenter les estimations ponctuelles de vos effectifs par des points, nous ne simulons pas un modèle continu...

4. Testez différentes conditions initiales. Discutez.