TD avec le logiciel R

Biologie et Modélisation
TP8 : Modèles récurrents dans $\mathbb{R}^2$

Automne 2018

Contents

1 Modèle avec deux classes d'âge

Chez l'hirondelle de cheminée (*Hirundo rustica*), on peut schématiquement classer les individus féconds en deux classes :

- les individus jeunes, d'un an, dont la fécondité moyenne est de 4 oisillons par femelle,
- les individus mûrs, de plus d'un an, dont la fécondité moyenne est de 6.6 oisillons par femelle.

De plus, 20 % des oisillons survivent à leur première année, alors que la survie des oiseaux jeunes est de 50% et celle des oiseaux mûrs de 70%.

Cette population est recensée tous les ans à la période des amours en faisant la distinction entre les individus jeunes (J_t) et mûrs (M_t). Sachant qu'il y a 50% de femelles dans les deux classes d'âge, l'évolution de la population des hirondelles d'une année sur l'autre s'exprime par les équations suivantes :

$$\begin{cases} J_{t+1} = & 0.2 \times (2 \times J_t + 3.3 \times M_t) \\ M_{t+1} = & 0.5 \times J_t + 0.7 \times M_t \end{cases}$$

1. Expliquez ces équations.

2. Implémentez une fonction qui renvoie un tableau avec le temps t dans la première colonne et les valeurs de J_t et M_t correspondantes dans les colonnes 2 et 3 respectivement.

   Vérification pour $J_0 = 2$, $M_0 = 0$ et $t_{max} = 10$:

```
    t        J        M
1   0 2.000000 0.000000
2   1 0.800000 1.000000
3   2 0.980000 1.100000
4   3 1.118000 1.260000
5   4 1.278800 1.441000
6   5 1.462580 1.648100
7   6 1.672778 1.884960
8   7 1.913185 2.155861
9   8 2.188142 2.465695
10  9 2.502616 2.820058
11 10 2.862284 3.225348
```

3. Calculez le taux d'accroissement de la population totale pour les 50 premiers pas de temps et représentez le graphiquement. Que constatez-vous ?

4. Représenter les effectifs d'hirondelles jeunes et mûres pour les 50 premières années. Discutez du devenir de cette population.

5. Calculez les proportions d'hirondelles jeunes et mûres pour les 50 premières années. Discutez.

2 Modèle avec deux populations en interaction

On étudie l'interaction entre un parasitoïde et son hôte et les conditions dans lesquelles ces deux populations coexistent. Le parasitoïde est une guêpe (*Venturia canescens*) qui pond ses oeufs dans les larves de papillons, l'hôte.

A la génération t, le nombre d'individus de la population d'hôtes est n_t et le nombre d'individus de la population de parasitoïdes est p_t. On suppose que l'évolution couplée de ces deux populations est décrite par ces équations :

$$\begin{cases} n_{t+1} = & (1+r) \times n_t \times (1 - f(p_t)) \\ p_{t+1} = & n_t \times f(p_t) \end{cases}$$

où la fréquence de parasitisme est donnée par : $f(p_t) = 1 - e^{-ap_t}$

1. Tracez le graphique de f en fonction de p, en donnant plusieurs valeurs numériques au paramètre a. Quelle est la signification de ce paramètre ?

2. Tracez, sur un même graphique, l'évolution de n et de p sur 15 générations lorsque $r = 1.0$ et $a = 0.02$, avec une population initiale d'hôtes de 20 individus et une population initiale de parasitoïdes deux fois moins importante. Tracez aussi un graphique de ces résultats dans le plan (n, p). Interprétez.

3. Simulez maintenant jusqu'à $t = 25$. Commentez.

On propose un autre modèle, avec cette fois une croissance logistique des hôtes :

$$\begin{cases} n_{t+1} = & n_t \times \left(1 + r\left(1 - \frac{n_t}{K}\right)\right) \times (1 - f(p_t)) \\ p_{t+1} = & n_t \times f(p_t) \end{cases}$$

4. Tracez l'évolution de n et de p sur 50 générations, et dans le plan (n, p) pour :
   - $r = 1$ et $K = 100$
   - $r = 1$ et $K = 200$
   - $r = 3$ et $K = 200$
   - $r = 3$ et $K = 300$