TD avec le logiciel R

Biologie et Modélisation
TP9 : Modèles de Leslie

Automne 2018

Contents

1 Modèle simple de Leslie

1.1 Introduction

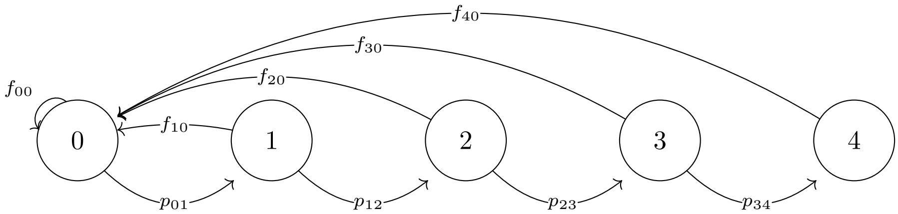
Écureuil roux *Sciurus vulgaris*. Source : Wikipedia

On étudie une cohorte (ensembe d'individus du même âge) de 500 écureuils durant cinq années. Chaque année on note le nombre d'individus vivants de cette cohorte ainsi que l'effectif moyen de la progéniture obtenue cette année là par individu de la cohorte. On obtient les résultats suivants :

Table 1: Suivi d'une cohorte de 500 écureuils

Année	Survivants	Progéniture
0	500	0
1	400	2
2	200	3
3	50	1
4	0	0

On peut schématiser le cycle de vie des écureuils par le diagramme ci-dessous.

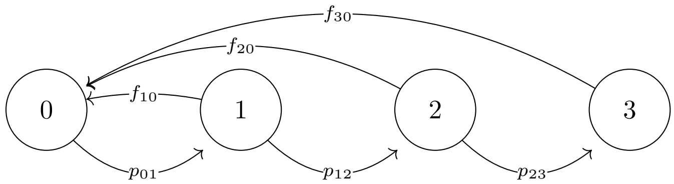


1. Que désignent les paramètres p_{ij} et f_{i0} du diagramme ci-dessus ?

2. Calculez les valeurs de ces paramètres d'après la Table 1.

3. On note $u_j^{(i)}$ le nombre d'écureuils de la classe d'âge i l'année j, écrivez les équations de récurrence du modèle.

4. Montrez que ce modèle peut se simplifier sous la forme du diagramme ci-dessous en n'étudiant que quatre classes d'âge.



5. Ecrivez les équations du modèle correspondant.

6. Implémentez une fonction qui renvoie un tableau avec le temps t dans la première colonne et les effectifs de chaque classe d'âge $(u_t^{(i)})$ correspondantes dans les colonnes suivantes, calculées pour t allant de 0 à t_{max} et le vecteur de conditions initiales $\left(u_0^{(0)}, u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, u_0^{(3)}\right) = (U0, U1, U2, U3)$. Indiquez bien le nom des colonnes de votre tableau de sortie.

   Vérification avec $\left(u_0^{(0)} = 10, u_0^{(1)} = 2, u_0^{(2)} = 0, u_0^{(3)} = 0\right)$ et $t_{max} = 5$:

```
> ecureuil(c(10, 2, 0, 0), 5)
```

```
  t U0(t) U1(t) U2(t) U3(t)
1 0 10.00  2.00  0.00  0.00
2 1  4.00  8.00  1.00  0.00
3 2 19.00  3.20  4.00  0.25
4 3 18.65 15.20  1.60  1.00
5 4 36.20 14.92  7.60  0.40
6 5 53.04 28.96  7.46  1.90
```

7. Si on part, à $t = 0$, de 10 écureuils de la classe d'âge 0, donnez les effectifs des différentes classes d'âge à $t = 5$ ans, $t = 10$ ans et $t = 50$ ans.

REMARQUE: Pour calculer le $n$ième terme d'une suite u définie par $u_n = f(u_{n-1})$, on peut utiliser une fonction récursive. Une fonction récursive est une fonction qui fait référence à elle-même. Dans R, on définit une fonction récursive comme suit :

```
> # En entrée
> #- n: le temps auquel on veut connaître la composition de la population,
> #- u0: le vecteur initial de composition des différentes classes
> #- func: la fonction récursive f qui calcule Un en fonction de Un-1
> Un <- function(n=0, u0, func )
+  {
+ if (n==0) {
+ return(u0)
+ } else
+      {
+      return(Un(n=n-1, u0=func(u0), func))
+      }
+ }
```

La fonction f qui calcule U_n en fonction de U_{n-1} pour la suite ci-dessus est définie par:

```
> frecurs <- function(Ut)
+  {
+ # on initialise le vecteur de sortie à (0,0,0,0)
+ Utpu <- numeric(4)
+ # on remplit le vecteur de sortie en calculant Ut+1
+ # Attention: indice 1 pour classe 0...
+ Utpu[1] <- 2*Ut[2] + 3*Ut[3] + 1*Ut[4]
+ Utpu[2] <- 0.8*Ut[1]
+    Utpu[3] <- 0.5*Ut[2]
+    Utpu[4] <- 0.25*Ut[3]
+    return(Utpu)
+ }
```

Ainsi, si on part, à $t = 0$, de 10 écureuils de la classe d'âge 0, on peut facilement avoir accès aux effectifs des différentes classes d'âge à $t = 5$ ans, $t = 10$ ans et $t = 50$ ans:

```
> U0=c(10,0,0,0)
> P5=Un(n=5,u0=U0,func=frecurs)
> P5

[1] 38.40 21.28  4.80  1.60

> P10=Un(n=10,u0=U0,func=frecurs)
> P10

[1] 347.2256 180.3264  56.9744   9.4560

> P50=Un(n=50,u0=U0,func=frecurs)
> P50

[1] 15692710941  8080472025  2600491894   418450684
```

8. Complétez votre tableau en ajoutant une colonne avec l'effectif total de la population $(u_t^{(0)} + u_t^{(1)} + u_t^{(2)} + u_t^{(3)})$ pour chaque t.

9. Représentez graphiquement l'évolution des effectifs des différentes classes d'âges, ainsi que l'évolution de l'effectif total de la population d'écureuils. Commentez.

10. Représentez graphiquement l'évolution des proportions relatives des différentes classes d'âges. Commentez.

11. Calculez le taux d'accroissement de la population. Comment évolue-t-il ?

1.2 Matrice de Leslie

La matrice de Leslie du modèle précédent correspondant à la forme suivante

$$\begin{pmatrix} 0 & f_{10} & f_{20} & f_{30} \\ p_{01} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Le calcul matriciel sous R permet d'effectuer rapidement les calculs précédents. Notez que sous R, le produit de matrice est effectué par l'opérateur %*%. La fonction *matrix.power()* du package *matrixcalc* permet de mettre une matrice à la puissance n. Il faudra préalablement installer le package (fonction *install.packages*) et y faire appel dès que nécessaire.

```
> library(matrixcalc)
> leslie1 <- matrix(data=c(0, 2, 3, 1, 0.8,0,0,0, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0.25,0), nrow=4, ncol=4, byrow=TRUE)
> u0 <- c(10,0,0,0)
> leslie1 %*% u0
```

```
     [,1]
[1,]    0
[2,]    8
[3,]    0
[4,]    0
```

```
> leslie1 %*% leslie1 %*% u0
```

```
     [,1]
[1,]   16
[2,]    0
[3,]    4
[4,]    0
```

```
> matrix.power(leslie1, 50) %*% u0
```

```
            [,1]
[1,] 15692710941
[2,]  8080472025
[3,]  2600491894
[4,]   418450684
```

Le taux de croissance converge vers la première valeur propre réelle de la matrice de Leslie. La distribution d'âge stable converge vers le vecteur propre à droite normé associé à la première valeur propre de la matrice de Leslie.

```
> eigen(leslie1)
```

```
eigen() decomposition
$values
[1]  1.55364299+0.0000000i -0.72912204+0.3782495i -0.72912204-0.3782495i
[4] -0.09539891+0.0000000i

$vectors
              [,1]                   [,2]                   [,3]            [,4]
[1,] 0.87932237+0i  0.6547526+0.0000000i  0.6547526+0.0000000i -0.008092715+0i
[2,] 0.45277963+0i -0.5660595-0.2936569i -0.5660595+0.2936569i  0.067864207+0i
[3,] 0.14571547+0i  0.2235472+0.3173475i  0.2235472-0.3173475i -0.355686475+0i
[4,] 0.02344739+0i -0.0159171-0.1170689i -0.0159171+0.1170689i  0.932103046+0i
```

```
> # Première valeur propre réelle:
> vp1=eigen(leslie1)$values[1]
> Mod(vp1) #donne la partie réelle
```

```
[1] 1.553643
```

```
> # Premier vecteur propre réel normé:
> dis <- Mod(eigen(leslie1)$vector[,1])
> dis /sum(dis)
```

```
[1] 0.58572101 0.30159877 0.09706180 0.01561842
```

```
> matrix.power(leslie1, 50) %*% u0 / sum (matrix.power(leslie1, 50) %*% u0)
```

```
           [,1]
[1,] 0.58572101
[2,] 0.30159877
[3,] 0.09706180
[4,] 0.01561842
```

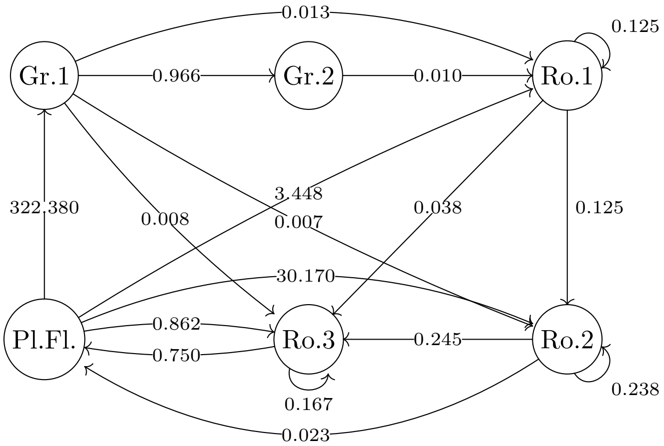
2 Dynamique des populations et cycle de vie d'une plante

La cardère des bois *Dipsacus sylvestris* est une plante au cycle de vie particulier : ses graines peuvent se développer ou rester en dormance une année. Durant ses premières années de vie, la plante développe une rosette de feuilles. On distingue des rosettes de trois tailles :

- petites rosettes : moins de 2.5 cm de diamètre.
- rosettes moyennes : 2.5-19 cm de diamètre.
- grandes rosettes : 19c m de diamètre ou plus.

Lorsque la plante a accumulé suffisament de réserves, elle fleurit et produit des graines une seule fois (on parle de "semelparité"). Le cycle de vie de cette plante peut être schématisé par le diagramme suivant :

La cardère sauvage *Dipsacus fullonum*. Source : Wikipedia



Où $Gr.1$ et $Gr.2$ désignent deux états de dormance des graines, $Ro.1-3$ les trois tailles de rosettes, et $Pl.Fl.$ désigne la plante fleurie.

1. Quels sont les nombres sur le schéma ci-dessus qui peuvent être interprétés comme des probabilités ?

2. Comment expliquez-vous les nombres figurant sur les flèches partant de la plante fleurie ?

3. Quelle est la matrice de transition correspondant au modèle ci-dessus ?

4. Vers quelle structuration stable et quel taux d'acroissement la population va-t-elle évoluer ?