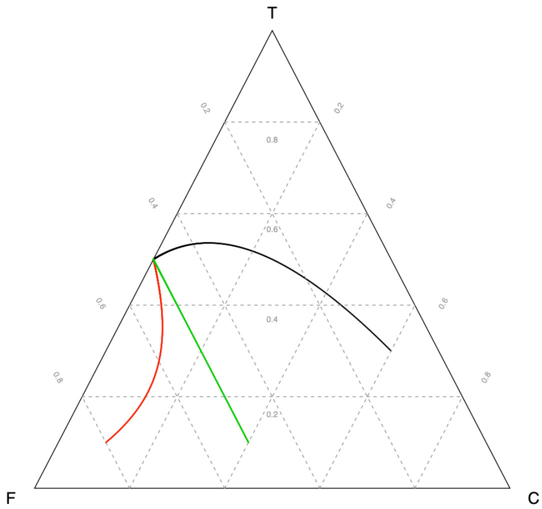
BioInformatique et Modélisation (4BIM - M1)

Année 2019-2020

Christelle LOPES - christelle.lopes@univ-lyon1.fr
Sandrine CHARLES - sandrine.charles@univ-lyon1.fr



http://insa-lyon.fr

Université Lyon 1
UMR CNRS 5558
htt://lbbe.univ-lyon1.fr

Théorie des jeux

1 Théorie des jeux

1.1 Faucons, Colombes, Bourgeois

On considère une nouvelle stratégie B (bourgeois) en plus des stratégies habituelles Faucons (F) et Colombes (C).

Les bourgeois utilisent les stratégies F et C en proportions égales $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. On admettra que :

$$E(B, B) = \frac{1}{2}E(F, C) + \frac{1}{2}E(C, F) \tag{1}$$

avec E(i,j) gain de i contre j.

1) Ecrire la matrice (3x3) du jeu (F,C,B).
2) Donner les équations du réplicateur. On note x, y et z les proportions respectives de F, C et B.
3) Ramener le système précédent à un système dans $\mathbb{R}^2$.
4) Rechercher les points fixes et faire l'étude de stablité locale.
5) Dessiner le portrait de phase dans le triangle défini par $x+y+z = 1$ (il pourra être utile de rechercher le sens des flèches sur les côtés du triangle).
6) La stratégie B est-elle une ESS ?

1.2 CC mars 2004

On considère la matrice de jeu suivante :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

1) Ecrire les équations du réplicateur, en prenant comme variables x, y et z.
2) Ecrire ce système en dimension 2.
3) Rechercher les points d'équilibre.
4) Faire l'étude de stabilité locale au voisinage des points d'équilibre.
5) Dessiner le portrait de phase dans le triangle $x+y+z = 1$. Compléter le dessin par quelques trajectoires et d'éventuelles séparatrices.

1.3 CC juin 2002

Théorie des jeux (D'après Hofbauer et Sigmund).

Soit la matrice de gain suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

1) Il s'agit d'un jeu à trois stratégies notées 1,2 et 3. Calculer le gain moyen dans une population composée de proportions x, y et z respectivement jouant la stratégie 1,2 ou 3 ($x + y + z = 1$). On rappelle que le gain moyen est donné par :

$$\Delta = (x, y, z)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{4}$$

2) Calculer les gains d'un individu jouant toujours la même stratégie 1,2 ou 3 contre la population de proportions x, y et z, notés respectivement $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = (1, 0, 0)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \Delta_2 = (0, 1, 0)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \Delta_3 = (0, 0, 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \tag{5}$$

3) Calculer le gain moyen de la population, dont on rappelle qu'il est égal à :

$$\Delta = x\Delta_1 + y\Delta_2 + z\Delta_3 \tag{6}$$

4) Rappeller et écrire les équations du réplicateur en dimension 3.
5) Ecrire les équations en dimension 2 en posant $z = 1 - x - y$.
6) Rechercher tous les équilibres, sur les sommets et les bords du triangel unité. Sur les deux côtés du triangle unité, $z = 0$ et $y = 0$, vous cherchez l'équation gouvernant la variable x, sous la forme $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Dans chaque cas, vous déterminez la fonction *f*. Rechercher les équilibres de ces équations et déterminez leur stabilité. De même, sur le côté $x = 0$, vous recherchez l'équation $\frac{dy}{dt} = g(y)$. Mêmes questions. Recherchez également un équilibre non trivial intérieur.
7) Etudier la stabilité locale de tous les équilibres.
8) Dessiner le portrait de phase dans le triangle unité.
9) Quel est le comportement asymptotique du système.

1.4 CC avril 2001

On considère la matrice de jeu suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

1) Ecrire les équations du réplicateur, en prenant comme variables x, y et z.
2) Montrer que ce système s'écrit de la façon suivante dans $\mathbb{R}^2(x + y + z = 1)$:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x[1 - x + 2(y - x(1 - x - y))] \\ \frac{dy}{dt} = y[1 - y - 2(y - x)(1 - x - y)] \end{cases} \tag{8}$$

3) Rechercher les points d'équilibre.
4) Faire l'étude de stabilité locale au voisinage des points d'équilibre.
5) Dessiner le portrait de phase dans le triangle $x+y+z = 1$. Compléter le dessin par quelques trajectoires et d'éventuelles séparatrices.

1.5 CC décembre 97

On considère la matrice de jeu suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

1) Ecrire les équations du réplicateur, en prenant comme variables x, y et z ($x + y + z = 1$).On pourra poser $\sigma = xy + xz + yz$.
2) Réécrire le système précédent dans $\mathbb{R}^2$.
3) Rechercher les points fixes.
4) Faire l'étude de stabilité locale au voisinage de tous les points fixes.
5) On cherche à montrer que le point fixe $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ est globalement asymptotiquement stable.
   a) Montrer que la fonction $V(x, y, z) = xyz$ est une fonction de Liapunov pour le système et le point fixe considéré.
   b) Montrer que $\dot{V}$ est de signe constant.
   c) Conclure.
6) Dessiner le portrait de phase dans le triangle $x + y + z = 1$.

1.6 CC Printemps 2016

Exercice 1

Apaloo (2006) décrit dans son article publié dans *Theoritical Population Biology* un jeu à trois stratégies (A, B et C) et définit la matrice des gains associée :

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

On note x, y et z les proportions respectives de A, B et C.

1. La stratégie B est-elle une ESS ? Justifiez.

2. Calculez les gains moyens des stratégies A, B et C, notés respectivement Δ_A, Δ_B et Δ_C.

3. Calculez le gain moyen dans la population, noté Δ.

4. Ecrivez les équations du réplicateur en dimension 3.

Le système s'écrit en dimension 2 de la façon suivante :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(5x^2 + 5y^2 - 9x - 8y + 7xy + 4) \\ \\ \dot{y} = y(5x^2 + 5y^2 - 5x - 7y + 7xy + 2) \end{cases} \tag{10}$$

5. Recherchez les points d'équilibre et donnez leurs coordonnées dans le plan (x, y, z). On notera $P_1 = (x^*, 0, 0)$, $P_2 = (0, y^*, 0)$, $P_3 = (0, 0, z^*)$, $P_4 = (0, y^*, z^*)$, $P_5 = (x^*, 0, z^*)$, $P_6 = (x^*, y^*, 0)$ et $P_7 = (x^*, y^*, z^*)$. Montrez que $P_6 = (1/3, 2/3, 0)$ et $P_7 = (8/19, 6/19, 5/19)$.

6. Donnez la matrice jacobienne du système en dimension 2.

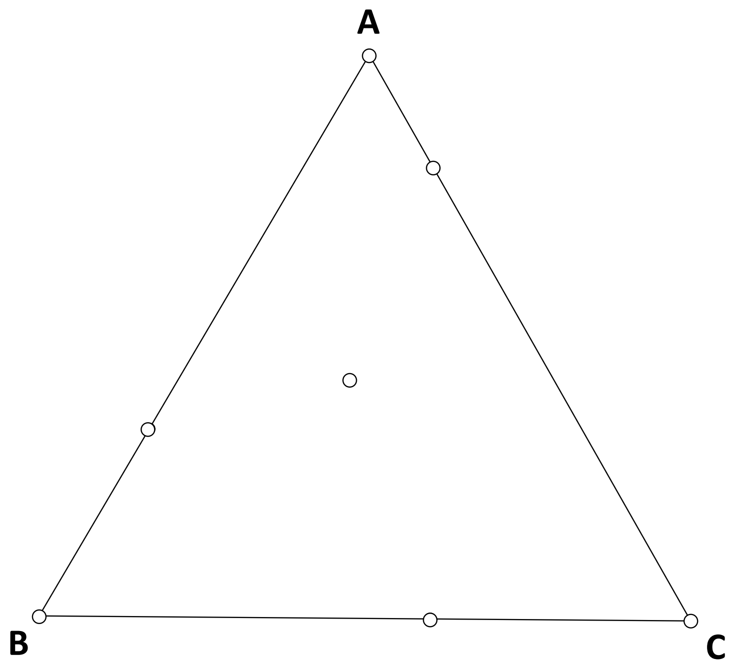
7. Etudiez la nature et la stabilité des points d'équilibre P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6.

La jacobienne au point d'équilibre P_7 est :

$$J_7^* = -\frac{2}{361}\begin{pmatrix} 196 & 144 \\ -81 & 51 \end{pmatrix}.$$

8. Déterminez la nature et la stabilité du point d'équilibre P_7.

9. Complétez le portrait de phase dans le triangle unité suivant (les ronds correspondent aux points d'équilibre). Justifiez le sens des flèches sur les côtés du triangle. Tracez quelques trajectoires et discutez les résultats obtenus.



Exercice 2

On s'intéresse au conflit entre deux espèces bactériennes endosymbiotiques d'une population de drosophiles au sujet du partage des nutriments au sein de leur hôte. Ces deux espèces de bactéries, appelées A et B, présentent chacune deux souches A_1/A_2 et B_1/B_2. Les deux souches d'une même espèce n'interagissent pas entre elles, par contre elles interagissent avec les souches de l'autre espèce :

- La présence d'une bactérie B_1 n'influence pas la fitness d'une bactérie A_1 mais par contre augmente la fitness d'une bactérie A_2 d'un facteur 3.
- La présence d'une bactérie B_2 augmente la fitness d'une bactérie A_1 d'un facteur 4 alors qu'elle augmente la fitness d'une bactérie A_2 d'un facteur 1.
- La présence d'une bactérie A_1 augmente la fitness d'une bactérie B_1 d'un facteur 2 alors qu'elle augmente la fitness d'une bactérie B_2 d'un facteur 1.
- La présence d'une bactérie A_2 augmente la fitness d'une bactérie B_1 d'un facteur 4 alors qu'elle n'influence pas la fitness d'une bactérie B_2.

Soit A la matrice de gain des bactéries de l'espèce A contre les bactéries de l'espèce B, et B celle des bactéries de l'espèce B contre les bactéries de l'espèce A. On note x la proportion de bactéries de la souche A_1 (et donc $(1-x)$ la proportion de bactéries de la souche A_2), et y la proportion de bactéries de la souche B_1 (et donc $(1-y)$ la proportion de bactéries de la souche B_2).

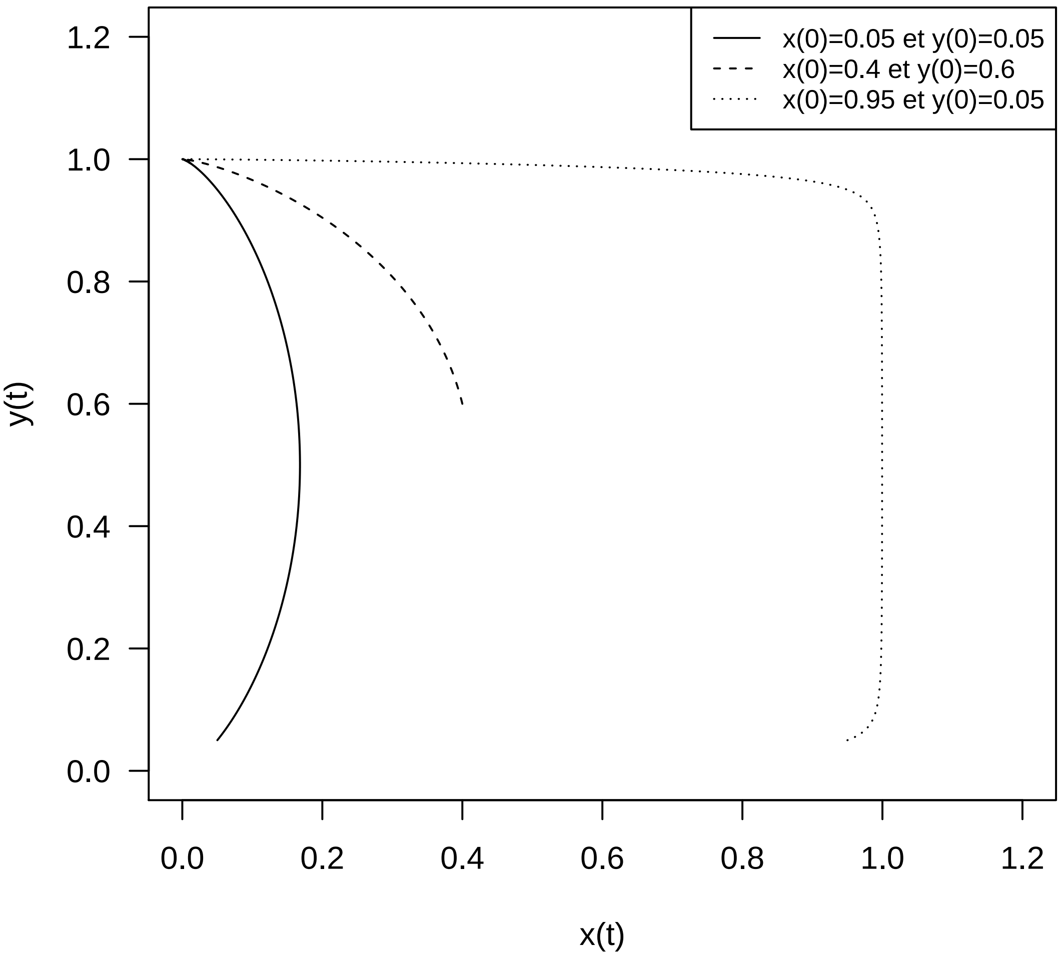
1. Complétez les matrices de gains suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} .... & 4 \\ 3 & .... \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} .... & 4 \\ 1 & .... \end{pmatrix}$$

2. Donnez les gains moyens des différentes stratégies, notés Δ_{A_1}, Δ_{A_2}, Δ_{B_1} et Δ_{B_2}.

3. Calculez le gain moyen dans la population de l'espèce A, noté Δ_A, et dans celle de l'espèce B, noté Δ_B.

   Les équations du réplicateur de ce modèle suivent l'évolution de x et de y au cours du temps. Dans le plan (x, y), ce système admet 4 points d'équilibre : $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$. Le portrait de phase de ce modèle est donné sur la Figure ci-dessous pour différentes conditions initiales.



4. Interprétez biologiquement les résultats obtenus sur l'issue de la compétition entre ces deux espèces de bactéries.

1.7 CC Printemps 2017

Exercice 1

On considère une nouvelle stratégie O (Opposants) en plus des stratégies habituelles Faucons (F) et Colombes (C). Les opposants adoptent systématiquement la stratégie opposée à celle de leur adversaire. On note $a(i, j)$ le gain de la stratégie i contre la stratégie j. On fait l'hypothèse suivante :

$$a(O, O) = \frac{1}{2}a(F, C) + \frac{1}{2}a(C, F)$$

On considère ici le coût lié à la perte de temps T égal à 0.

On note x, y et z les proportions relatives de chacune des stratégies ($x + y + z = 1$).

1. Ecrivez la matrice **A** des gains pour les trois stratégies. Justifiez.

2. Calculez les gains individuels des stratégies F, C et O. Vous les noterez Δ_F, Δ_C et Δ_O.

3. Vérifiez que le gain moyen vaut $\Delta = \frac{G}{2} - \frac{Cx^2}{2}$.

4. Écrivez les équations du réplicateur en dimension 3.

5. Démontrez que les équations du réplicateur en dimension 2 sont les suivantes :

$$\begin{cases} \dot{x} = x\left(\frac{C}{2}x^2 - \frac{G+C}{2}x + \frac{G}{2}\right) \\ \dot{y} = y\left(\frac{C}{2}x^2 + \frac{G}{2}y - \frac{G}{2}\right) \end{cases} \tag{11}$$

   Que remarquez-vous ?

6. Pour quelle(s) valeur(s) de x la première équation (celle de $\dot{x}$) s'annule-t-elle ?

7. Déduisez les points d'équilibre de la question précédente. Montrez qu'ils sont au nombre de cinq sous certaines conditions sur les paramètres G et C que vous préciserez.

8. Calculez la matrice jacobienne du système (1).

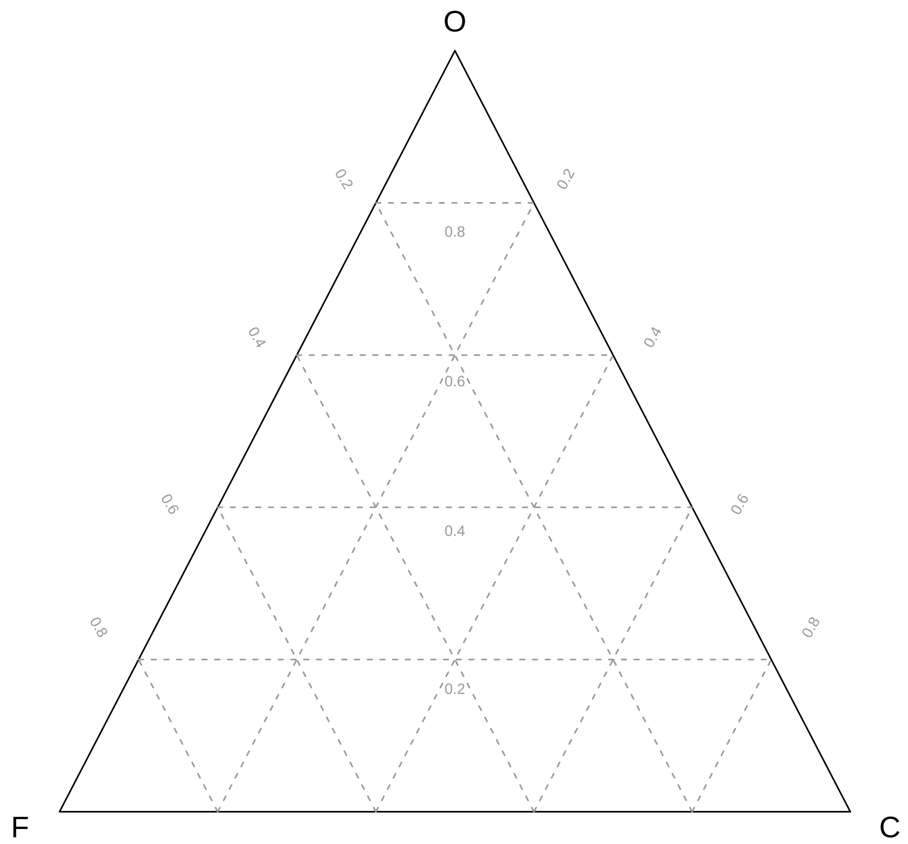
9. Sous la condition $G < C$, déterminez la stabilité locale des points d'équilibre.

10. On fixe $G = 1.8$ et $C = 3$. Complétez le portrait de phase ci-après en faisant apparaître les cinq points d'équilibre. Justifiez mathématiquement du sens des flèches sur les côtés du triangle. Figurez les séparatrices éventuelles et représentez les trajectoires pour les conditions initiales suivantes :

    — $x(0) = 0.8$, $y(0) = 0.1$ et $z(0) = 0.1$ en noir.

    — $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.8$ et $z(0) = 0.1$ en vert.

    — $x(0) = 0.1$, $y(0) = 0.3$ et $z(0) = 0.6$ en rouge.



11. Que pouvez-vous en conclure quant à la dynamique du système ?

Exercice 2

Deux conducteurs A et B dirigent leur voiture l'une contre l'autre dans une rue trop étroite pour qu'elles puissent se croiser sans provoquer d'accident. Si un conducteur ralentit (stratégie R), tandis que l'autre garde la même vitesse (stratégie N), il perd la face : il a alors un gain a, tandis que son adversaire obtient un gain b. Si les deux ralentissent en même temps, alors les deux conducteurs obtiennent le même gain c. Enfin, si aucun des deux conducteurs ne ralentit, alors l'accident arrive et chaque conducteur a un gain d.

On appelle x la proportion de conducteurs dans la population adoptant la stratégie R, et y la proportion de conducteurs adoptant la stratégie N ($x + y = 1$).

12. Donnez la matrice de gain associée à ce jeu en fonction des paramètres a, b, c et d.

13. Donnez les conditions sur les paramètres pour que la stratégie pure N soit une ESS.

Pour des valeurs données des paramètres, les équations du réplicateurs sont alors :

$$\begin{cases} \dot{x} = x(2x - 2x^2 - 4xy + 2y^2) \\ \\ \dot{y} = y(4x - 2y - 2x^2 - 4xy + 2y^2) \end{cases} \tag{12}$$

14. A partir des équations du modèle, déterminez les valeurs des paramètres a, b, c et d de la matrice de gain définie à la question 1.

15. Réduisez le système (2) à une dimension (variable x).

16. Vers quel état le processus dynamique évolue-t-il ?

Index