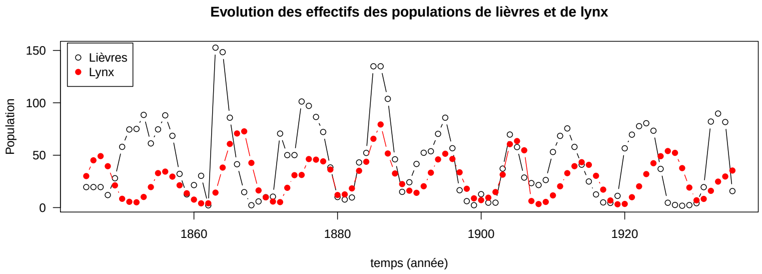
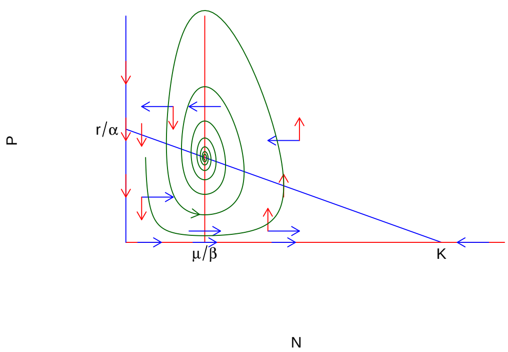
Mathématiques Appliquées à la Biologie

Modélisation

Automne 2021



Exercices et Problèmes



Enseignants

Christelle Lopes	christelle.lopes@univ-lyon1.fr
Sylvain Mousset	sylvain.mousset@univ-lyon1.fr
Laurent Gueguen	laurent.gueguen@univ-lyon1.fr
Alice Genestier	alice.genestier@etu.univ-lyon1.fr

Biométrie et Biologie Evolutive
UMR CNRS 5558
http://lbbe.univ-lyon1.fr

Université Claude Bernard - Lyon 1

http://www.univ-lyon1.fr

1 Systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}$

1.1 Dynamique des populations : modèles classiques (edor-05 BMM-1.5)

Pour des populations ne comportant qu'une seule espèce, on considère les modèles de dynamique des populations du type :

$$\frac{dN}{dt} = Ng(N)$$

où $N(t)$ est la densité de population et $g(N)$ le taux de croissance intrinsèque de la population.

1. Montrer qu'un point d'équilibre N_0 (non nul) de cette équation est stable si et seulement si $g'(N_0) < 0$.

2. Différents modèles ont été proposés :
   - Modèle logistique : $g(N) = r\left(1 - \frac{N}{K}\right)$
   - Modèle avec effet Allee : $g(N) = r_0 - \alpha(N - \eta)^2$
   - Modèle de Gompertz : $g(N) = -k\ln(N)$
   - Modèle de Ricker : $g(N) = re^{-\beta N}$
   - Modèle de Beverton-Holt : $g(N) = \frac{r}{\alpha+N}$

   Dans chaque cas, tracer $g(N)$ en fonction de N. En déduire les points d'équilibre (non triviaux) et leur stabilité.

1.2 Biomasse végétale consommée par des herbivores (edor-12 CC BMM Mars 2006)

On modélise l'évolution d'une biomasse végétale consommée par des herbivores. Le modèle est le suivant :

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) - \frac{aPH}{b+P},$$

où P désigne la biomasse végétale et H la densité en herbivores (dans ce modèle H est un paramètre positif supposé constant). Les paramètres r, K, a, et b sont des réels positifs tels que $aH > br$ et $K > b$.

1. Interprétation biologique du modèle.
   (a) En l'absence d'herbivorie, quel est le type de croissance de la biomasse végétale ?
   (b) Comment évolue la consommation des végétaux lorsque la biomasse végétale augmente ? Interprétez les paramètres a et b.
2. Analyse qualitative.
   (a) Recherchez les points d'équilibre et leurs conditions d'existence.
   (b) À l'aide d'une méthode de votre choix, étudiez la stabilité des points d'équilibre.

(c) Dressez les portraits de phase possibles selon les valeurs des paramètres.

(d) Dressez l'ensemble des chroniques possibles selon les valeurs des paramètres.

3. Interprétation des résultats. On se place dans le cas où il existe trois points d'équilibre.

   (a) Que se passe-t-il lorsque $P_0 = \frac{K-b}{2}$?

   (b) Quelle est la plus petite valeur d'herbivorie $H_{\max}$ conduisant à l'extinction certaine de la biomasse végétale ?

   (c) Partant des conditions initiales $P_0 = \frac{K-b}{2}$ on augmente l'herbivorie jusqu'à $H > H_{\max}$. La biomasse végétale disparaît. L'herbe repoussera-t-elle si l'herbivorie est réduite graduellement pour atteindre une valeure $H < H_{\max}$?

1.3 CC décembre 2005 (edor-cc-200512 Élimination d'un médicament)

Un médicament est injecté en goutte-à-goutte à un patient. Pour obtenir une action thérapeutique, la concentration sanguine d'un médicament doit atteindre la concentration thérapeutique c_t, en revanche une concentration sanguine anormalement élevée de ce médicament peut entraîner la mort du patient. On étudie l'évolution de la concentration sanguine de ce médicament selon les deux modèles d'élimination suivants :

— Élimination passive du médicament : L'évolution de la concentration sanguine du médicament peut être modélisée de la façon suivante :

$$\frac{dc}{dt} = a - b\,c, \tag{1}$$

où les paramètres utilisés (a, b) sont tous des réels positifs.

— Élimination active du médicament : L'évolution de la concentration sanguine du médicament est modélisée de la façon suivante :

$$\frac{dc}{dt} = a - \frac{V\,c}{K + c}, \tag{2}$$

où les paramètres utilisés (a, b, V et K) sont tous des réels positifs.

Vous traiterez les questions suivantes pour les deux modèles.

1. Explicitez le système biologique décrit par l'équation ci dessus (équations 1 et 2) à l'aide d'un schéma. Donnez la signification biologique des différents paramètres.

2. Recherchez les points d'équilibre et leurs conditions d'existence.

3. Déterminez la stabilité des points d'équilibre lorsqu'ils existent.

4. Tracez le ou les portraits de phase possibles du système.

5. À quelle vitesse doit-on régler le goutte-à-goutte pour atteindre la concentration thérapeutique $c_t = \frac{K}{2}$?

6. Suite à une erreur de manipulation, le goutte-à goutte a été réglé à la vitesse $\frac{3\,V}{2}$. Cette erreur est-elle grave, et pourquoi ?

1.4 CC décembre 2007 (edor-cc-200712 Dynamique des Populations de Daphnies)

Dans une étude sur la dynamique des populations de daphnies *Daphnia magna* alimentées par un flux constant de ressources, on a proposé le modèle de croissance suivant :

$$\dot{N} = rN\frac{T - F(N)}{T} \tag{3}$$

où r et T sont des paramètres strictement positifs et $F(N)$ désigne la vitesse de consommation des ressources par la biomasse N, et T est la vitesse du flux de ressources.
La relation suivante a par ailleurs été proposée pour $F(N)$

$$F(N) = aN + b\dot{N} \tag{4}$$

où a et b sont deux paramètres strictement positifs.

1. Soit $N^\star$ un point d'équilibre non nul du modèle. Donnez l'expression de la vitesse de consommation des resources $F_{N^\star}$ lorsque cet équilibre est atteint. En déduire l'expression de $N^\star$.
2. En utilisant l'expression 4 montrez que l'équation 3 peut s'écrire sous la forme

$$\dot{N} = rN\frac{K - N}{K + cN} \tag{5}$$

   vous donnerez l'expression des paramètres K et c en fonction des paramètres a, b, T et r.
3. En utilisant l'équation 5, déterminez les points d'équilibre du système.
4. À l'aide d'une méthode de votre choix, déterminez la stabilité des points d'équilibre.
5. Tracez le portrait de phase du système.
6. Tracez les chroniques du système.

1.5 Lutte contre le froid chez les manchots (edor-cc-mab-200912 CC MAB - Décembre 2009)

Afin de lutter contre le froid, certains animaux sont connus pour former des colonies. C'est le cas par exemple du manchot empereur et de certains insectes. On cherche à modéliser l'évolution de la taille d'une telle colonie.

Rappels de géométrie dans le plan

La colonie est modélisée simplement comme un cercle de rayon R.

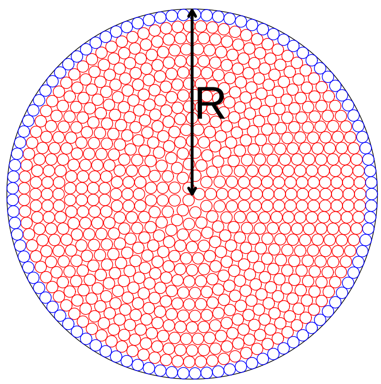
On rappelle que l'aire (ou la "surface") A d'un cercle de rayon R est :

$$A = \pi R^2$$

La circonférence (ou le "périmètre") C d'un cercle de rayon R est :

$$C = 2\pi R$$

La colonie modélisée



Construction du modèle

La colonie est modélisée par un cercle de rayon R dans lequel les individus sont agglutinés. Seuls les individus situés autour de la colonie (en bleu sur le graphique) subissent les effets du froid.

1. Chaque individu occupe une surface moyenne α.
   (a) Exprimez le nombre total d'individus dans la colonie N en fonction de R, π et α.
   (b) Exprimez à présent le rayon de la colonie R en fonction du nombre total d'individus dans la colonie N.
2. Chaque individu du bord de la colonie occupe une longueur β sur le périmètre de la colonie.
   (a) Exprimez le nombre N_b d'individus situés sur le bord de la colonie en fonction de R, π et β.
   (b) À l'aide de vos réponses aux questions précédentes, montrez que le nombre d'individus sur le bord de la colonie N_b est proportionnel à $\sqrt{N}$.

On décrit à présent la dynamique de la population totale à l'aide du modèle simple suivant :

$$\dot{N} = rN - \mu\sqrt{N}, \tag{6}$$

où r et μ sont deux paramètres strictement positifs.

Interprétation du modèle

3. En quoi le modèle de l'équation 6 permet-il de différencier les individus situés sur le bord de la colonie ?
4. Quel terme de l'équation 6 concerne la dynamique de la population des individus du centre de la colonie ? Quel modèle reconnaissez-vous ?

Analyse qualitative du modèle

5. Recherchez les points d'équilibre du modèle décrit par l'équation 6.
6. À l'aide de la méthode de votre choix, étudiez la stabilité de ces points d'équilibre.
7. Donnez le portrait de phase du modèle.
8. Montrez que les chronique des solutions du modèle admettent un point d'inflexion pour une valeur de N que vous calculerez.
9. Représentez les chroniques des solutions.

Conclusions biologiques

10. En fonction de la taille initiale de la colonie N_0, quelles sont les prédictions du modèle ?
11. Ces prédictions vous paraissent-elles réalistes ?
12. En argumentant votre proposition, proposez une nouvelle d'équation, inspirée de l'équation 6, qui vous paraitrait décrire un modèle plus réaliste.

1.6 La formation des glaciers (edor-cc-mab-201111 CC MAB novembre 2011)

La dynamique du volume des glaciers est extrêmement complexe, car elle tient compte non seulement des conditions climatiques (chute de neige, ensoleillement, température,...) mais aussi du fait que la glace dans un glacier n'est pas figée, mais s'écoule, ainsi que de l'effet d'albedo.

Dans une modélisation simplifiée, si on note E l'épaisseur de glace d'un glacier en un endroit donné, on peut écrire

$$\frac{dE}{dt} = a - \frac{2.E}{E^2 + b^2} \tag{7}$$

où a et b sont des paramètres positifs.

1. À quoi correspond le paramètre a ?
2. Si $a = 0$, quel est le point d'équilibre, et quelle est sa stabilité ?

Désormais, $a > 0$.

3. Donner les points d'équilibre du modèle 7. Vous distinguerez trois conditions d'existence, à savoir $ab < 1$, $ab = 1$ ou $ab > 1$,
4. (a) Si $ab < 1$, étudiez le signe de $\frac{dE}{dt}$ (vous pourrez calculer les valeurs de $\frac{dE}{dt}$ pour $E = 0$, $E = b$ et $E \to \infty$ et vous rappeler que $\frac{dE}{dt}$ est continue).
   (b) En déduire la stabilité des points d'équilibre dans les trois conditions, et tracer les portraits de phase.

Dans le modèle précédent, un glacier peut se former dès qu'il tombe un peu de neige, même très peu. Pour corriger cela, on transforme l'équation du modèle en :

$$\frac{dE}{dt} = a - \frac{2.(E + \frac{b}{2})}{(E + \frac{b}{2})^2 + b^2} \tag{8}$$

(a) On pose $F = E + b/2$. Que vaut $\frac{dF}{dt}$?

(b) À partir de votre réponse à la question 3, montrer que si $0 < a < \frac{4}{5b}$ un seul point d'équilibre correspond à une épaisseur positive de glace.

(c) Dans le cas où $0 < a < \frac{4}{5b}$, un glacier peut-il se former à partir d'une surface sans glace (justifiez) ?

2 De $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^2$

2.1 Examen de Novembre 2015 (edor2nonlin-mab-2015)

On s'intéresse à la dynamique d'une population de lapins (de densité L) en interaction avec une autre espèce (de densité R). Les populations se trouvent dans un habitat où la chasse des lapins est possible et autorisée (de paramètre c). La dynamique des deux espèces L et R est décrite par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -rL\ln\left(\frac{L}{k}\right) - cL - aLR \\ \\ \frac{dR}{dt} = eaLR - mR \end{cases} \tag{9}$$

où les paramètres r, k, c, a, e et m sont strictement positifs et $k > \frac{m}{ea}$.

Partie 1

Dans un premier temps, on considère que l'espèce R est absente de l'habitat ($R = 0$). La dynamique de la population de lapins est alors décrite par l'équation suivante :

$$\frac{dL}{dt} = -rL\ln\left(\frac{L}{k}\right) - cL \tag{10}$$

1. De quel type d'exploitation s'agit-il ?

2. A l'aide des Figures 1 et 2, déterminer le(s) point(s) d'équilibre de l'équation (10) et tracer le portrait de phase. Justifier (aucun calcul n'est nécessaire).

   Partie 2

   Dans un second temps, on considère que les deux espèces peuvent être présentes, mais que la chasse est interdite ($c = 0$). La dynamique du système est alors décrite par le modèle suivant :

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} = -rL\ln\left(\frac{L}{k}\right) - aLR \\ \\ \frac{dR}{dt} = eaLR - mR \end{cases} \tag{11}$$

3. De quel type d'interactions s'agit-il ? Justifier.

4. Que représente le paramètre m ?

5. Donner l'équation des isoclines horizontales et faites les apparaître sur le portrait de phase de la Figure 3 (ne pas oublier la légende).

6. Donner l'équation des isoclines verticales et faites les apparaître d'une autre couleur sur le portrait de phase de la Figure 3 (ne pas oublier la légende).

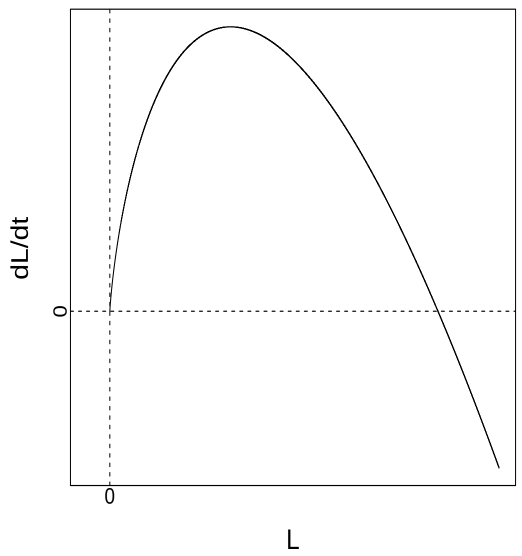


FIGURE 1 – Représentation de $\frac{dL}{dt} = f(L)$ du modèle (10)

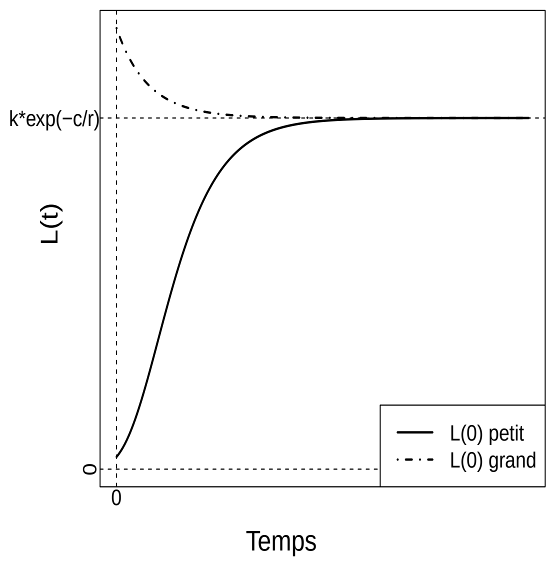


FIGURE 2 – Chroniques du modèle (10)

7. Le système 11 admet trois points d'équilibre : $A = (0,0)$, $B = (k,0)$ et $C = (\frac{m}{ea}, R^*)$. Donner la valeur de R^* en fonction des paramètres. Sur le portrait de phase de la Figure 3, positionner ces trois points en indiquant leur nom. Déterminer les conditions d'existence des points d'équilibre si nécessaire.

8. Compléter ci-dessous la matrice Jacobienne du système 11 :
$$J = \begin{pmatrix} -r\ln\left(\frac{L}{k}\right) - aR - r & -aL \\ ..... & ..... \end{pmatrix}$$
L'étude de stabilité du point d'équilibre A révèle qu'il s'agit d'un Point Selle.

9. Déterminer la stabilité du point d'équilibre $B = (k,0)$.

10. Montrer que pour le point d'équilibre C, la jacobienne peut s'écrire :
$$J_C = \begin{pmatrix} -r & -aL^* \\ eaR^* & 0 \end{pmatrix}$$
(le résultat peut éventuellement être admis afin de continuer l'exercice).
11. Déterminer la stabilité du point d'équilibre C (on ne cherchera pas à déterminer sa nature).

12. Compléter le portrait de phase en Figure 3 en faisant figurer le sens des vecteurs vitesse (que vous justifierez) et les trajectoires correspondant aux conditions initiales où :

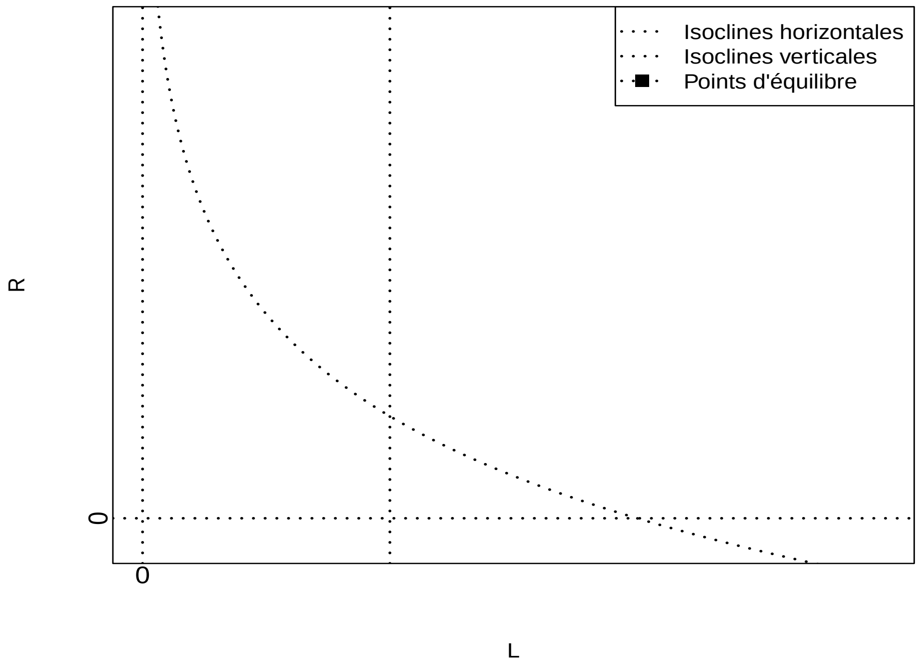


FIGURE 3 – Portrait de phase pour $k > \frac{m}{ea}$

— $L(0) = R(0) = \epsilon$
— $L(0) = 0$ et $R(0) = \epsilon$
— $L(0) = \epsilon$ et $R(0) = 0$
avec $\epsilon \neq 0$.

Une étude des populations a permis d'estimer les paramètres du modèle. Ainsi, on peut fixer $r = 0.6$, $k = 500$, $m = 0.4$, $a = 0.1$, $e = 0.02$ et $c = 0.2$.

13. **QUESTION BONUS** - Déterminer à quelles valeurs la densité de lapins va se stabiliser dans chacune des deux conditions étudiées (modèles 10 et 11). Quel contexte est plus favorable à cette population de lapins ? Jusqu'à quelle valeur de c ?

3 Systèmes dynamiques dans $\mathbb{R}^2$

3.1 Des plantes et des promeneurs (edor2nonlin-mabct-200612 Contrôle terminal MAB, décembre 2006)

Drosera rotundifolia est une plante qui pousse dans les tourbières. Sa biologie particulière (c'est une plante carnivore) et son statut de plante protégée suscitent l'intérêt des touristes. Cependant sa petite taille et son aspect assez banal la font facilement passer inaperçue. Aussi les promeneurs qui la recherchent piétinnent-ils bien souvent le milieu où elle pousse et dégradent involontairement les tourbières où elle vit.

On modélise la dynamique d'une population de *Drosera* dans une tourbière visitée par des touristes. Le modèle proposé est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dD}{dt} = \rho D\left(1 - \dfrac{D}{K}\right) - \alpha P D \\[2ex] \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta D \end{cases}$$

où les variables D et P désignent les tailles des populations de *Drosera* et des promeneurs, et les paramètres α, β, K, μ et ρ sont des réels strictement positifs.

1. Interprétation biologique :
   (a) Donnez une interprétation biologique des équations.
   (b) En l'absence de promeneurs, quel est le type de dynamique des populations de la *Drosera* ? Sans faire de calculs supplémentaires, donnez les caractéristiques de ce modèle (nombre et stabilité des points d'équilibre).
   (c) En l'absence de *Drosera*, quel est le type de dynamique des populations de promeneurs ? Sans faire de calculs supplémentaires, donnez les caractéristiques de ce modèle (nombre et stabilité des points d'équilibre).
2. Analyse qualitative du modèle : Pour tracer le portrait de phase, on placera D en abscisse et P en ordonnée. Notez que D et P ne peuvent pas être négatifs.
   (a) Déterminez l'isocline (ou les isoclines) verticale(s), que vous reporterez ensuite sur le portrait de phase.
   (b) Déterminez l'isocline (ou les isoclines) horizontale(s) que vous reporterez ensuite sur le portrait de phase.
   (c) $(0, 0)$ est un point d'équilibre évident de ce système. Déterminez le second points d'équilibre $(D^\star, P^\star)$ du système, et ses éventuelles conditions d'existence.
   (d) Calculez la matrice Jacobienne du système.
   (e) Pour chaque point d'équilibre :
   Donnez l'expression de la Jacobienne au point d'équilibre.
   Déterminez la stabilité du point d'équilibre (on ne cherchera pas à caractériser sa nature).
   (f) Terminez le portrait de phase en indiquant le sens des vecteurs vitesses et en traçant quelques trajectoires.

3.2 Le paradoxe de l'enrichissement : un modèle proie-prédateur avec effet Allee (edor2nonlin-mabct-200712 Contrôle terminal MAB, décembre 2007)

On s'intéresse à un modèle proie-prédateur dont la dynamique de la population des proies présente un effet Allee. Les équations du modèle sont les suivantes

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = N\left(\dfrac{N}{K_1} - 1\right)\left(1 - \dfrac{N}{K_2}\right) - \alpha NP \\ \dfrac{dP}{dt} = -\mu P + \beta NP \end{cases} \tag{12}$$

où les variables N et P désignent la quantité de proies et de prédateurs et où les paramètres α, β, μ, K_1 et K_2 sont strictement positifs avec $K_1 < \frac{\mu}{\beta} < K_2$.

1. Portrait de phase : Pour tracer le portrait de phase, on placera N en abscisse et P en ordonnée. Notez que N et P ne peuvent pas être négatifs.
   (a) Déterminez les équations des isoclines verticales ($\dot{N} = 0$).
   (b) Déterminez les équations des isoclines horizontales ($\dot{P} = 0$).
   (c) Faites apparaître les deux types d'isoclines de couleurs différentes sur le portrait de phase de la figure 4 (n'oubliez pas la légende).
   (d) Déterminez les coordonnées des quatre points d'équilibre du système notés $(N_1^\star, P_1^\star)\dots(N_4^\star, P_4^\star)$. Vous ne chercherez pas à déterminer la valeur de $P_4^\star$ (voir figure 4). Sur la figure 4, vous placerez les points d'équilibre et remplacez les "…" par les valeurs appropriées.
   (e) Placez les vecteurs vitesse sur le portrait de phase de la figure 4.
2. Étude qualitative au voisinage des points d'équilibre : La Jacobienne du système s'écrit

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \left(\frac{N}{K_1} - 1\right)\left(1 - \frac{N}{K_2}\right) - \alpha P + \frac{N(K_1+K_2-2N)}{K_1K_2} & -\alpha N \\ \beta P & \beta N - \mu \end{pmatrix} \tag{13}$$

   (a) Étudiez la nature et la stabilité des points d'équilibre $(N_1^\star, P_1^\star)\dots(N_3^\star, P_3^\star)$.
   (b) Étudiez la stabilité (et uniquement la stabilité) de $(N_4^\star, P_4^\star)$ selon les valeurs des paramètres (vous ne chercherez pas à vérifier la présence éventuelle de centres). Vous pourrez vous aider de vos réponses aux questions 1 et 2 pour simplifier et donner une expression de la matrice Jacobienne au point $(N_4^\star, P_4^\star)$ en fonction de $N_4^\star$ et $P_4^\star$.
   (c) Interprétez le résultat précédent en fonction la positions de $N_4^\star$ par rapport à $\frac{K_1+K_2}{2}$.
3. Interprétation :
   (a) Sur la figure 4, tracez une trajectoire typique dont l'état de départ se situe dans la zone hâchurée A.
   (b) Sur la figure 4, tracez une trajectoire typique dont l'état de départ se situe dans la zone hâchurée B.
   (c) En procédant au nourrissage des proies, on peut augmenter la capacité limite de la population K_2 tout en laissant les autres paramètres du système inchangés. Le portrait de phase du système devient alors celui de la figure 5 (sur lequel vous pouvez reporter les mêmes isoclines et vecteurs vitesse que sur la figure 4). À l'aide du portrait de phase de la figure 5 et de vos réponses aux questions précédentes, expliquez si cette pratique sera effectivement bénéfique à la population des proies.

Figure 4 – Portrait de Phase du Système à compléter et rendre avec votre copie

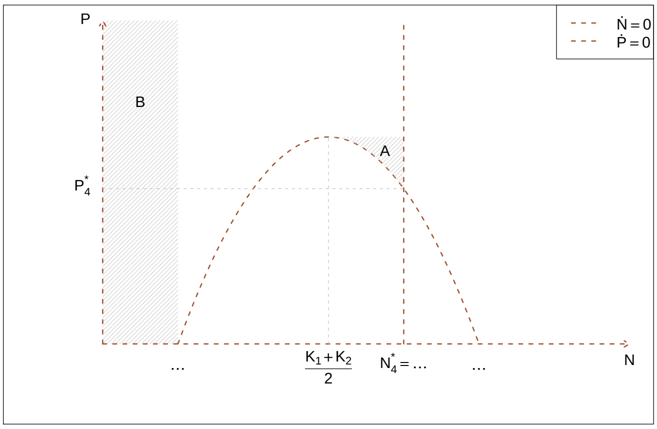
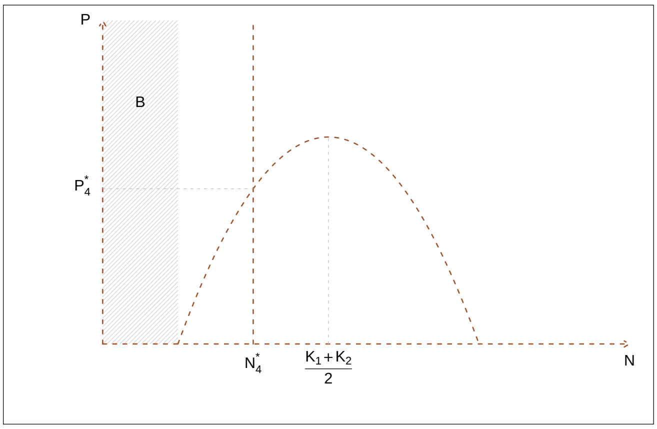


Figure 5 – Portrait de Phase du Système lorsque K_2 est augmenté.



3.3 Un modèle de mutualisme (edor2nonlin-mabct-200701s2 Contrôle terminal MAB, janvier 2007, deuxième session)

Dans l'étude du système, on pourra utiliser la symétrie des équations. Le résultat demandé à la question 6 pourra éventuellement être admis afin de continuer l'exercice.

On considère deux espèces en interaction selon le modèle suivant

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \dfrac{N_1}{K_1 + \alpha N_2}\right) \\ \\ \dfrac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \dfrac{N_2}{K_2 + \beta N_1}\right) \end{cases}$$

où les variables N_1 et N_2 désignent les tailles des populations des deux espèces et les paramètres K_1, K_2, α et β sont des réels strictement positifs.

1. Décrivez brièvement l'interaction entre les deux espèces.
2. Déterminez les équations des isoclines horizontales et verticales.
3. Déterminez les points d'équilibre et leurs conditions d'existence éventuelles.
4. Calculez la matrice Jacobienne du système.

Pour les questions suivantes, on se place dans les conditions pour lesquelles il existe un point d'équilibre $(N_1^\star, N_2^\star)$ pour lequel $N_1^\star > 0$ et $N_2^\star > 0$.

5. Déterminez la nature et la stabilité des points d'équilibres différents de $(N_1^\star, N_2^\star)$.
6. Montrez que la Jacobienne du système au point d'équilibre $(N_1^\star, N_2^\star)$ s'écrit

$$\mathbf{M}_{(N_1^\star, N_2^\star)} = \begin{pmatrix} -r_1 & \alpha r_1 \\ \\ \beta r_2 & -r_2 \end{pmatrix}$$

7. Déterminez la stabilité du point d'équilibre $(N_1^\star, N_2^\star)$ (on ne cherchera pas à déterminer sa nature).
8. Sur le portrait de phase du système, tracez les isoclines nulles, placez les points d'équilibre et représentez les vecteurs vitesses.
9. Tracez les trajectoires correspondant aux conditions initiales suivantes :

$$\begin{aligned} N_1 &= 0 & \text{et} \quad N_2 &= \frac{K_2}{2} \\ N_1 &= \frac{K_1}{2} & \text{et} \quad N_2 &= 0 \\ N_1 &= \frac{K_1}{2} & \text{et} \quad N_2 &= \frac{K_2}{2} \end{aligned}$$

3.4 Dépollution par des bactéries (edor2nonlin-mabct-201101 Examen terminal MAB Janvier 2011)

Certaines bactéries, comme le genre *Thiobacillus*, peuvent vivre dans des environnements pollués et et les décontaminer en métabolisant certains composés chimiques tels que des métaux lourds, des composés soufrés, des nitrates... Ces composés sont transformés par les bactéries d'une forme polluante en une forme non polluante, ou plus facile à nettoyer. Pour certaines espèces, la présence de polluants est même nécessaire à la survie !

Ces bactéries peuvent consommer le polluant, mais celui-ci reste néanmoins toxique. On modélise la croissance de la taille N d'une population de bactéries à l'aide de l'équation différentielle 14

$$\frac{dN}{dt} = Ng(R) \tag{14}$$

où le taux de croissance intrinsèque de la population de bactéries, $g(R)$, dépend de la concentration de polluant R. On propose l'équation 15 pour le taux de croissance intrinsèque des bactéries :

$$g(R) = -(\alpha - R)(\beta - R) \tag{15}$$

où α et β sont deux paramètres réels tels que $0 < \alpha < \beta$.

Dans un système de lagunage, des effluents pollués parviennent dans un bassin de lagunage où une population de bactéries métabolise les polluants. On souhaite modéliser le fonctionnement d'une lagune de dépollution. On suppose que l'apport de polluants se fait à flux constant dans la lagune. Le modèle utilisé est le suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -(\alpha - R)(\beta - R)N \\ \\ \dfrac{dR}{dt} = -RN + \varphi \end{cases} \tag{16}$$

où φ est un paramètre réel strictement positif.

Interprétation biologique

1. D'après les équations 14 et 15, donnez une interprétation biologique des paramètres α et β
2. Interprétez en termes biologique l'équation $\dfrac{dR}{dt} = -RN + \varphi$

Étude qualitative du système

Pour la présentation du plan de phase, vous placerez la taille N de la population de bactéries en abscisse ("axe des x") et la concentration de polluant dans le sol en ordonnée ("axe des y").

3. Donnez l'équation des isoclines verticales.
4. Donnez l'équation de l'isocline horizontale.
5. Donnez les coordonnées des points d'équilibre de ce système.
6. Calculez la forme générale de la jacobienne de ce système.
7. Déterminez nature et la stabilité des points d'équilibre (on ne fera pas la distinction foyer-nœud).
8. Tracez le portrait de phase sur lequel vous ferez apparaître :
   (a) les isoclines verticales,
   (b) l'isocline horizontale,

(c) les points d'équilibre,

(d) les vecteurs vitesse supportés par les isoclines nulles.

9. Montrez qu'il existe une valeur Φ telle que le point d'équilibre stable est un foyer pour $\varphi < \Phi$ et un nœud pour $\varphi > \Phi$. Vous donnerez l'expression de Φ en fonction de α et β.

Interprétation

À l'aide de vos réponses aux questions précédentes, dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Vous justifierez vos réponses en traçant sur le plan de phase les trajectoires correspondantes.

10. Lorsque la concentration initiale en polluant est $R_0 < \alpha$, le système évolue toujours vers le point d'équilibre stable.
11. Lorsque la concentration initiale en polluant est $R_0 > \beta$, le système ne peut pas évoluer vers le point d'équilibre stable.

3.5 Session 2 2017 (edor2nonlin-mab2017-s2)

Soient deux populations d'effectifs respectifs N_1 et N_2, interagissant selon les équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 \times N_1 - m_1 \times N_1^2 + \alpha \times N_1 \times N_2 \\ \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 \times N_2 - m_2 \times N_2^2 + \beta \times N_1 \times N_2 \end{cases} \tag{17}$$

Tous les paramètres sont strictement positifs.

1. Que type d'interaction lie les deux populations ? Justifiez.

2. Donnez une interprétation biologique aux paramètres.

3. Donnez l'expression des isoclines verticales dans le plan (N_1, N_2) et tracez-les sur les portraits de phase de la Figure 6 (n'oubliez pas la légende).

4. Donnez l'expression des isoclines horizontales dans le plan (N_1, N_2) et tracez-les sur les portraits de phase de la Figure 6 (n'oubliez pas la légende).

   Le système présente quatre points d'équilibre : $A = (0, 0)$, $B = (x_0^*, 0)$, $C = (0, y_0^*)$ et $D = (x_1^*, y_1^*)$.

5. Placez les points d'équilibre sur les Figures 6.

6. Donnez l'interprétation biologique du point B.

7. Déterminez la valeur de x_0^* en fonction des paramètres.

   On donne $y_0^* = \frac{r_2}{m_2}$, $x_1^* = \frac{r_1 \times m_2 + \alpha \times r_2}{m_1 \times m_2 - \alpha \times \beta}$ et $y_1^* = \frac{m_1 \times r_2 + \beta \times r_1}{m_1 \times m_2 - \alpha \times \beta}$.

8. Donnez la condition d'existence biologique du point d'équilibre D. Identifiez la condition correspondante à chaque portrait de phase présenté sur la Figure 6 ? Justifiez.

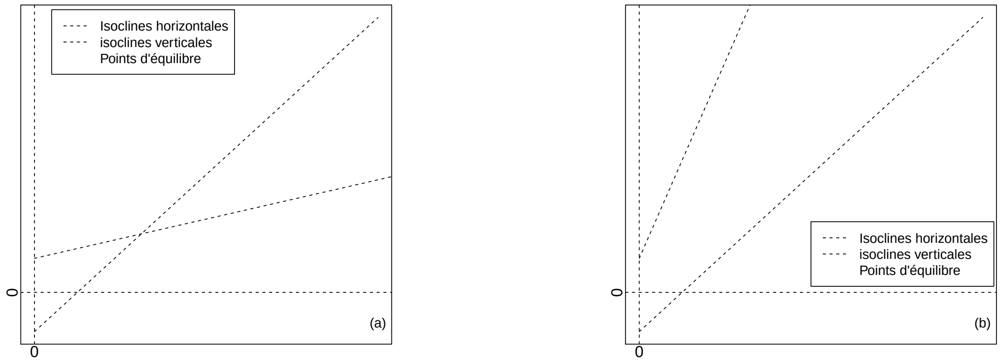


FIGURE 6 – Portraits de phase du système.

9. Donnez la matrice Jacobienne du système.

10. Déterminez la nature et la stabilité du point A.

    Des chroniques du modèle sont présentées sur la Figure 7(c).

11. A quel portrait de phase de la Figure 6 correspondent les chroniques de la Figure 7(c) ? Justifiez.

12. Sur l'autre portrait de phase de la Figure 6, représentez les vecteurs vitesse (en justifiant leur sens) et tracez les chroniques correspondantes sur la Figure 7(d).

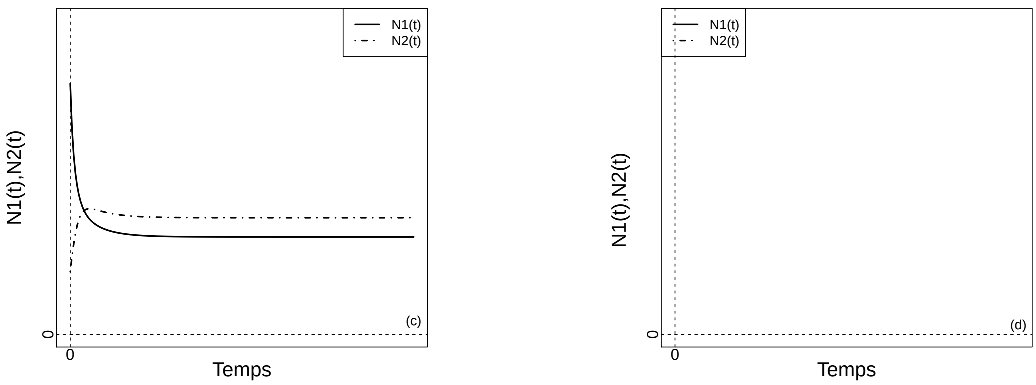


Figure 7 – Chroniques du système.

Index