— En pratique —

Corollaire 1 S'il existe dans le plan un domaine attractant pour un système dynamique donné et si ce domaine ne contient pas de point d'équilibre, alors il existe au moins un cycle limite entièrement contenu dans ce domaine.

Corollaire 2 contient un unique point d'équilibre instable

ex $(\alpha = 1)$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + (1 - x^2 - y^2)x \\ \frac{dy}{dt} = -x + (1 - x^2 - y^2)y \end{cases}$$

$(0,0)$

P.E.

$$\begin{cases} y + (1 - x^2 - y^2)x = 0 & (1) \mid y \\ -x + (1 - x^2 - y^2)y = 0 & (2) \mid -x \end{cases}$$

$y(1) - x(2)$: $y^2 + x^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$.

$$\begin{cases} f(x,y) = y + x - x^3 - xy^2 \\ g(x,y) = -x + y - x^2 y - y^3 \end{cases}$$

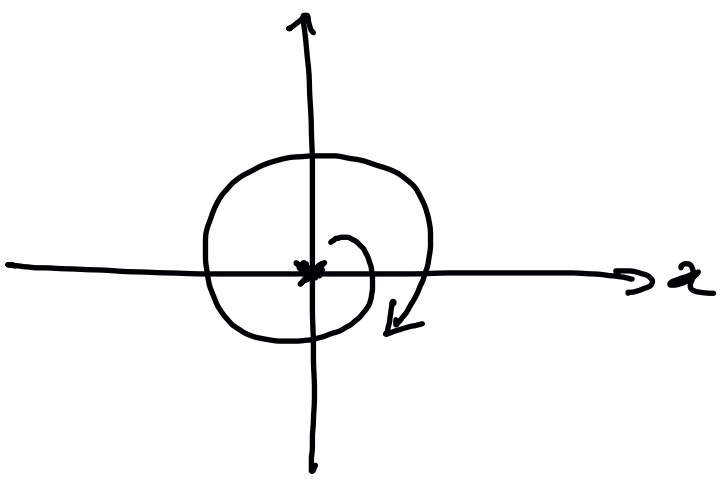
$$A = \begin{pmatrix} 1 - 3x^2 - y^2 & 1 - 2xy \\ -1 - 2xy & 1 - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}$$

$$A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$, $\beta = -1$

Foyer I.



$$V(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2}$$

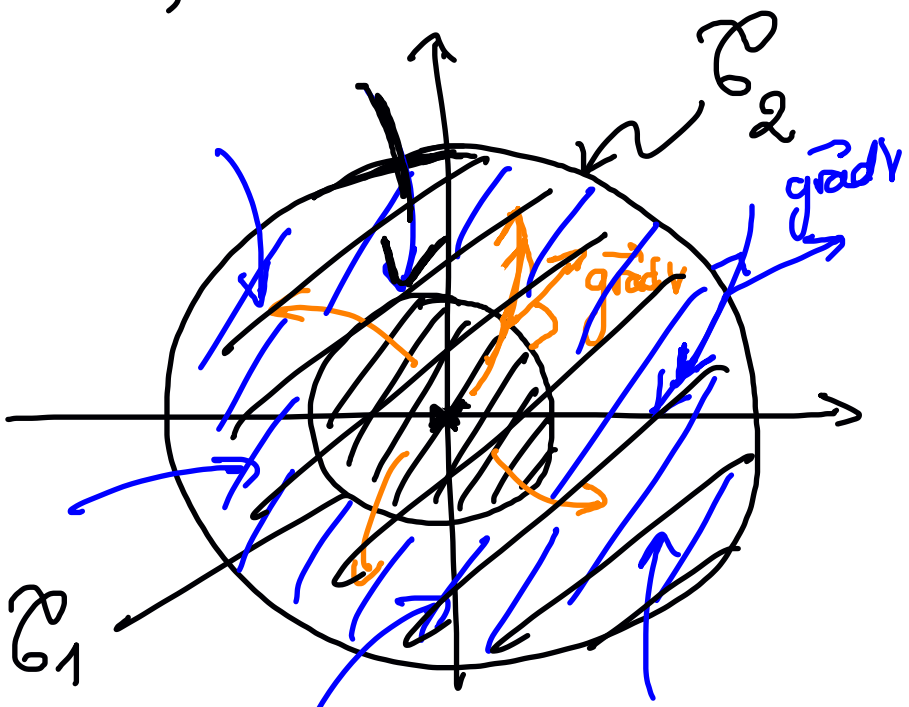
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= x\cdot f(x,y) + y\cdot g(x,y)$$

$$= \cancel{xy} + (1-x^2-y^2)x^2 - \cancel{xy} + (1-x^2-y^2)y^2$$

$$= (1-x^2-y^2)\underbrace{(x^2+y^2)}_{>0}$$

Signe de $\frac{dV}{dt}$ $=$



$$\boxed{\mathcal{D}_2 = \{(x,y) \,/\, x^2+y^2 \leq 4\}}$$

Signe de $1-x^2-y^2$

$1-x^2-y^2 \leq 0$

si $x^2+y^2 \geq 1$

si $x^2+y^2 \leq 1$ $(\mathcal{D}_1)$, $\frac{dV}{dt} \geq 0$

si $1 < x^2+y^2 \leq 2$, $\frac{dV}{dt} \leq 0$

$D = \mathcal{D}_2$: attractant, il contient un point d'équilibre instable $\longrightarrow$ Corollaire 2 du thm PB

$\longrightarrow \exists$ au-un C.L CD -

Astuce : penser à une fct de Lyapunov pr construire un domaine attractant.

ex Van der Pol $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = (2-x^2)y - x \end{cases}$

$= 2y - x^2 y - x$

P.E. $y = 0 \Rightarrow x = 0$ $(0,0)$

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1-2xy & 2-x^2 \end{pmatrix}$ $A_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\det = 1 > 0$

$tr = 2 > 0$ i

$\Delta = tr^2 - 4\det = 0$ N.D.I

Plan de phase (x,y) $\vec{v} \begin{vmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{vmatrix}$

Isoclines horizontales

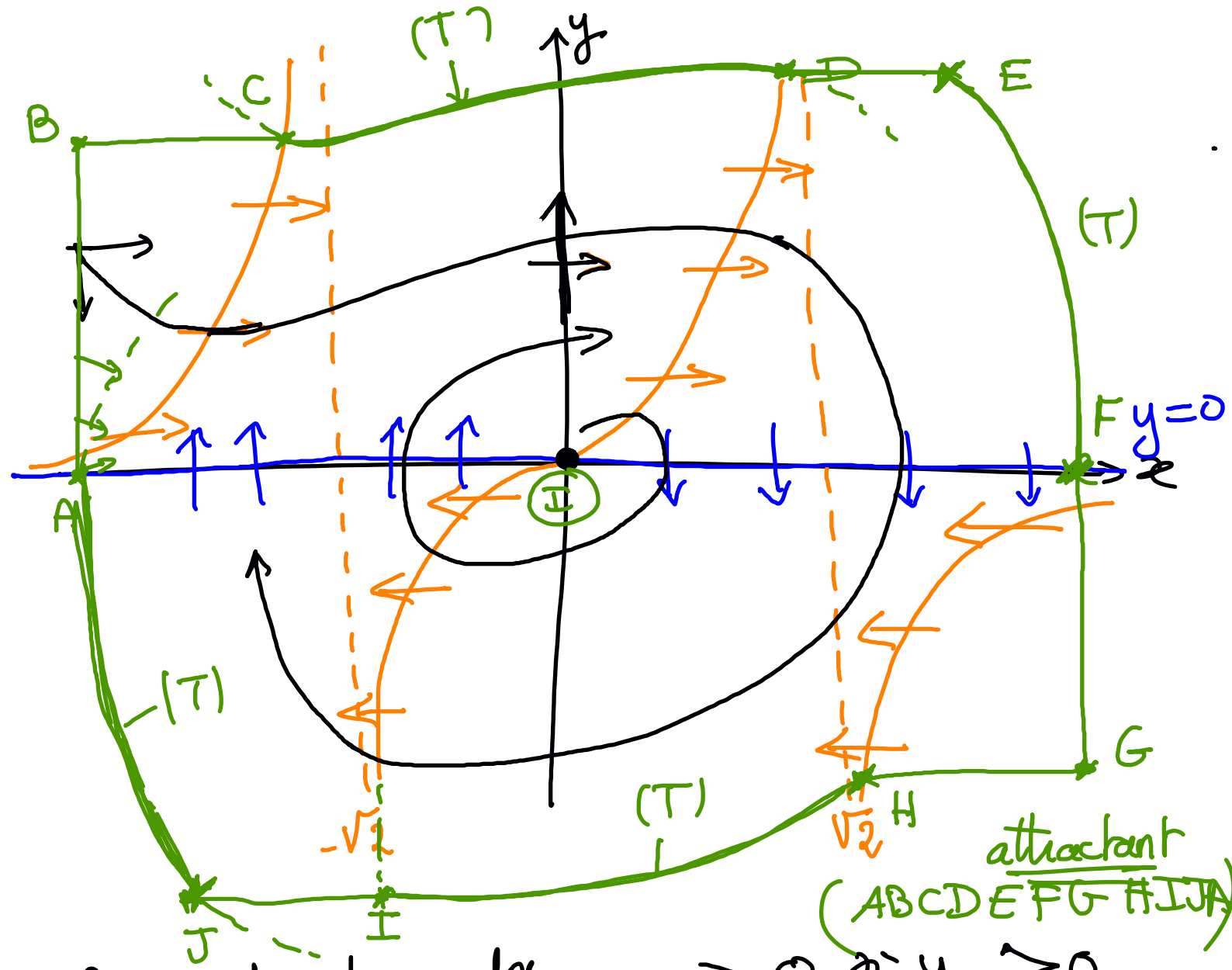
$\Leftrightarrow \vec{v} \begin{vmatrix} dx/dt \\ 0 \end{vmatrix}$ $\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow y = \frac{x}{2-x^2}$

$= h(x)$

Isoclines verticales

$\updownarrow$ $\vec{v} \begin{vmatrix} 0 \\ dy/dt \end{vmatrix}$ $\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow y = 0$

axe horizontal



Signe de $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} = y > 0$ si $y > 0$

Signe de $\frac{dy}{dt}$ sur $y=0$: $\frac{dy}{dt} = -x > 0$ si $x < 0$

Thm de PB – Corollaire 2

Il existe au moins 1 cycle limite entièrement contenu dans le domaine attractant (A-J-A)